

Analysis ist Tatsachen

INHALTSVERZEICHNIS

Tatsache 1	
Punkt auf Graph $v \leftrightarrow$ Koordinaten erfüllen Funktionsgleichung	3
Tatsache 2	
Geraden stehen senkrecht aufeinander: $m_1 \cdot m_2 = -1$	4
Tatsache 3	
Umkehrfunktionen	5
3.1 Definitions- und Wertebereich	5
3.2 Umkehrbarkeit einer Funktion	5
Tatsache 4	
Überblick über Graphen von Polynomfunktionen	6
4.1 Parabeln $y = ax^2 + bx + c$	6
4.2 Funktionen dritten Grades $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	7
4.3 Funktionen vierten Grades: $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	8
Tatsache 5	
Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ fällt nicht in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, also nicht in ganz \mathbb{R}	9
Tatsache 6	
Anzahl der Nullstellen eines Polynoms	10
Tatsache 7	
Verhalten des Graphen beim Durchgang durch die Nullstelle	11
Tatsache 8	
Symmetrien bei den Graphen von Polynomfunktionen	12
Tatsache 9	
Veränderungen von Graphen: $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x)+a$, $f(x+a)$	13
- $f(x)$	13
$f(-x)$	13
$f(x) + a$	14
$f(x+a)$	14
Tatsache 10	
Gebrochen-rationale Funktionen: muss noch ergänzt werden	15
Tatsache 11	
Steigung von f in x_0	16

Tatsache 12

Wichtige Ableitungsregeln: sin/cos, Produkt- und Kettenregel.....	17
12.1 Ableitung von sinus- und cosinus- Funktionen	17
12.2 Produktregel	17
12.3 Quotientenregel	18
12.4 Kettenregel	18

Tatsache 13

Monotoniekriterium: Bestimmung der Steigung mit Hilfe von f.....	19
--	----

Tatsache 14

Extrempunkte und Sattelpunkte	20
14.1 Waagrechte Tangenten	20
Sattelpunkt (SAP) / Terrassenpunkt (TEP)	21
Minimum / Maximum.....	22
14.2 Extrempunkte ohne Ableitung	23

Tatsache 15

Wendepunkte	24
-------------------	----

Tatsache 16

Krümmung	25
----------------	----

Tatsache 17

Welche Funktionen sind stetig?	26
--------------------------------------	----

Tatsache 18

Differenzierbarkeit \Rightarrow Stetigkeit.....	27
---	----

Tatsache 19

Sprünge und Knicke bei Graphen	28
18.1 Sprünge	28
18.2 Knicke	28

TATSACHE 1**Punkt auf Graph v \leftrightarrow Koordinaten erfüllen Funktionsgleichung**

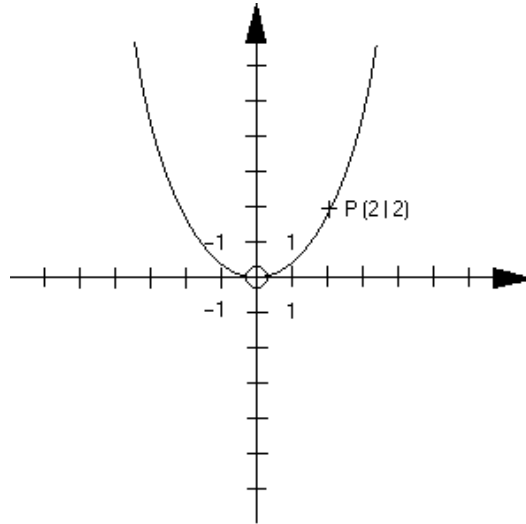
Wenn ein Punkt auf einem Graphen liegt, müssen seine Koordinaten die Funktionsgleichung erfüllen.

Beispiel:

$$y = 0,5 x^2$$

$$P(2|2) \rightarrow x = 2$$

$$y = 0,5 * 4 = 2 \rightarrow y = 2$$

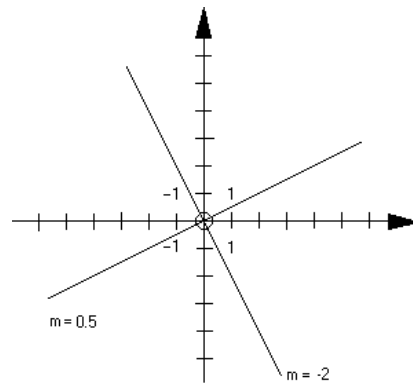


TATSACHE 2**Geraden stehen senkrecht aufeinander: $m_1 \cdot m_2 = -1$** **Beispiel:**

$$f(x) = -2x$$

$$g(x) = 0,5x$$

$$-2 \cdot 0,5 = -1$$



TATSACHE 3**Umkehrfunktionen**

- 3.1 Definitionen - und Wertebereich
3.2 Wann gibt es eine Umkehrfunktion?

3.1 Definitions- und Wertebereich

Da bei der Bildung der Umkehrfunktion einer Funktion, durch die Spiegelung der Graphen an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten, die x- und y-Werte vertauscht werden, werden auch der Definitions- und der Wertebereich vertauscht.

Folglich gilt:

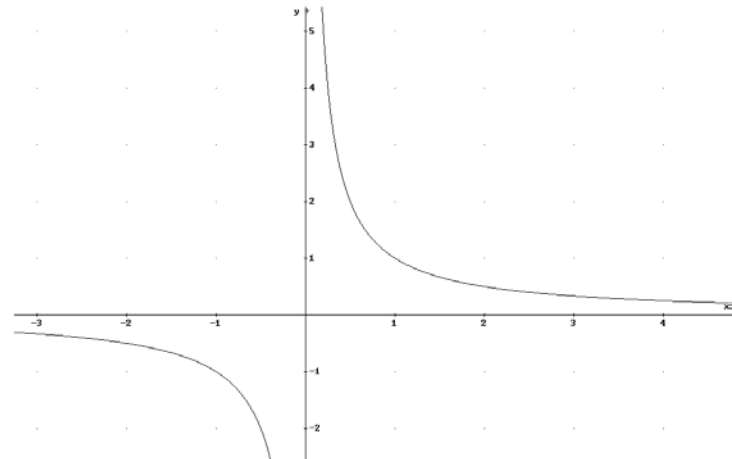
ID der Funktion f = IW der Umkehrfunktion f^{-1}
IW der Funktion f = ID der Umkehrfunktion f^{-1}

3.2 Umkehrbarkeit einer Funktion

Eine Funktion ist dann umkehrbar, wenn sie in ihrem gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend ist (analog wenn f im gesamten ID streng monoton fallend ist)

Die Umkehrung dieses Satzes gilt aber nicht !! So muss eine Funktion, die umkehrbar ist, noch lange nicht monoton sein. Zum Beispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ zwar umkehrbar

($f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$), aber nicht streng monoton abnehmend in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (vgl. Tatsache 5)

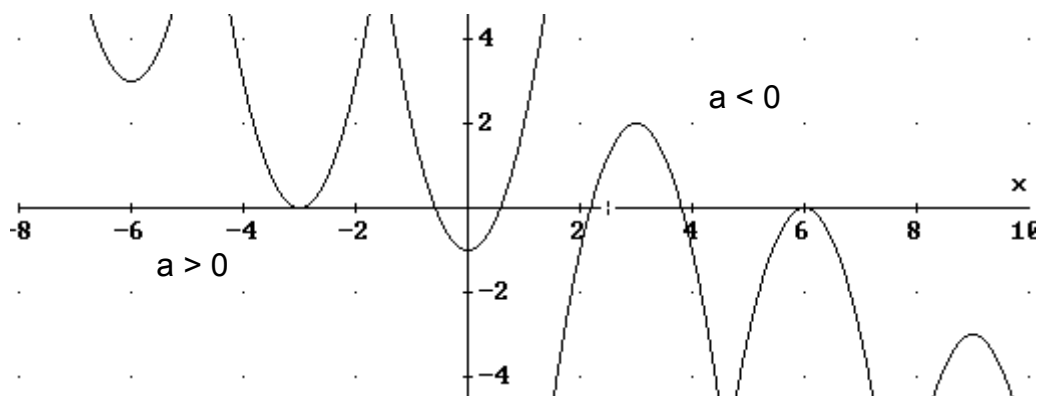


TATSACHE 4

- 4.1 Parabeln
- 4.2 Funktionen dritten Grades
- 4.3 Funktionen vierten Grades

Überblick über Graphen von Polynomfunktionen

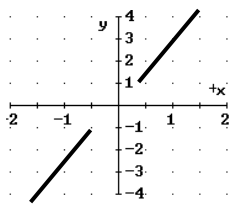
4.1 Parabeln $y = ax^2 + bx + c$



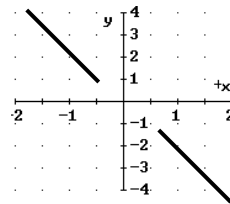
Durch Änderung von a wird die Parabel enger ($|a| > 1$) oder weiter ($|a| < 1$);
das Vorzeichen bestimmt, ob die Parabel nach oben, ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnet ist.

4.2 Funktionen dritten Grades $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Verhalten im Unendlichen

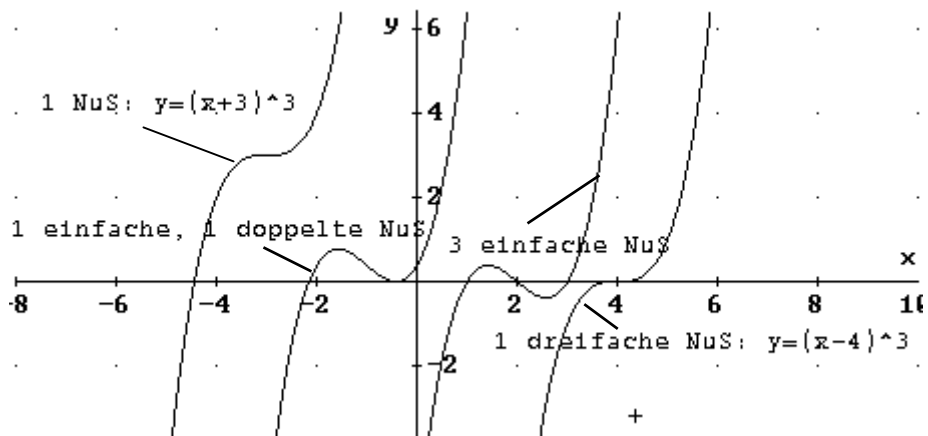


bei $a > 0$ und



bei $a < 0$

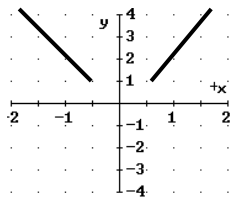
!!! Unterschiede in Anzahl und Art der NuS !!!



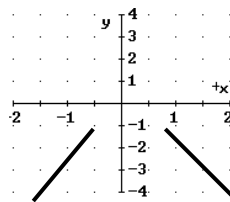
→ aber Graphen haben *mindestens 1* und *höchstens 3* NuS !!!

4.3 Funktionen vierten Grades: $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Verhalten im Unendlichen

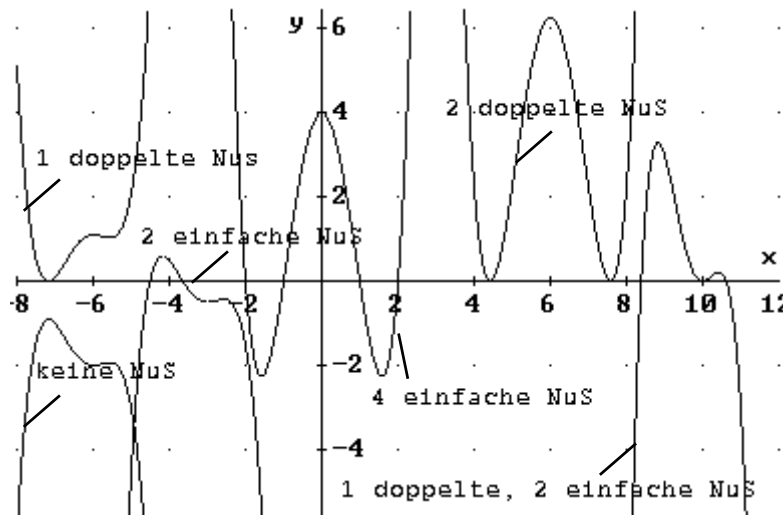


bei $a > 0$ und



bei $a < 0$

!!! Unterschiede in Anzahl und Art der NuS !!!



Das sind natürlich noch lange nicht alle Möglichkeiten.

Tipp: Experimente mit Derive.

Graphen nach rechts / links verschieben, indem man x durch $x+a$ substituiert,
nach oben / unten, indem man zum Funktionsterm a addiert.

Will man doppelte NuS, so bestimmt man Maxima oder Minima, und addiert bzw. subtrahiert sie vom Funktionsterm.

Diese Funktion hat z. B. genau 2 einfache Nullstellen:

$$y = x^4 - x = x \cdot (x^3 - x)$$

Durch Raten finden wir als 2. Nullstelle $x = 1$

Polynomdivision ergibt:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 1) : (x-1) = x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ x^2 - 1 \\ \underline{-x^2 + x} \\ x - 1 \end{array}$$

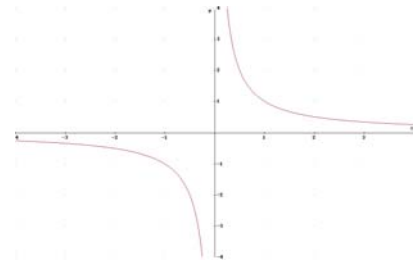
Und das Ergebnis hat keine weitere Nullstelle: $x^2 + x + 1 = 0 \quad D = 1 - 4 < 0$

$$\Rightarrow y = x^4 - x = x \cdot (x^3 - x) = x \cdot (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

TATSACHE 5

**Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ fällt nicht in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
also nicht in ganz \mathbb{R}**

- betrachtet man zunächst gesondert den Bereich \mathbb{R}^- , so ist die Funktion streng monoton abnehmend, da gilt: $x_1 > x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- die streng monotone Abnahme der Funktion gilt auch im Bereich \mathbb{R}^+ , da auch hier gilt: $x_1 > x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- betrachtet man die Funktion aber in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ so ist sie nicht streng monoton abnehmend, da $x_1 > x_2$, und $f(x_1) > f(x_2)$ möglich ist.
0,5 > -2, und 2 > -0,5



**Sollte auch hier gelten, dass die Funktion streng monoton abnehmend ist, so müsste gelten: $x_1 > x_2 \leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
0,5 > -2 \leftrightarrow 2 < -0,5: dies gilt aber nicht**

TATSACHE 6**Anzahl der Nullstellen eines Polynoms**

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Beweisidee:

$y = x^4 - 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4$ ist ein Polynom 4. Grades.

Kennt man eine Nullstelle, z.B. $x=1$, so kann man mittels Polynomdivision den Funktionsterm durch $x-1$ teilen:

$$(x^4 - 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4) : (x-1) = x^3 - x^2 + 2x + 4$$

Das Ergebnis hat jetzt nur noch Grad 3.

Danach würde man für das Ergebnis der Polynomdivision weiter nach Nullstellen suchen und z.B. finden: $x=-1$.

Bei der nächsten Polynomdivision erniedrigt sich der Grad des Ergebnisses wieder um einen Grad:

$$(x^3 - x^2 + 2x + 4) : (x+1) = x^2 - 2 \cdot x + 4$$

Diese Ergebnis hat jetzt noch höchstens 2 Nullstellen.

Da sich also für jede gefundene Nullstelle der Grad des Ergebnisses um eins erniedrigt, hat das Polynom höchstens so viele Nullstelle wie der Grad angibt.

TATSACHE 7

Verhalten des Graphen beim Durchgang durch die Nullstelle

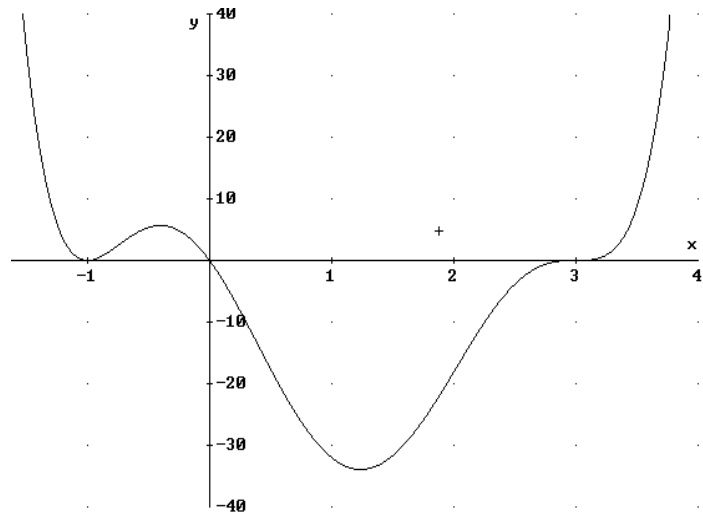
Beispiel:

$$y = x \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 3)^3$$

einfache Nullstelle bei $x=0$:
Vorzeichenwechsel des Graph

doppelte Nullstelle bei $x=-1$: Graph berührt die x-Achse

dreifache Nullstelle bei $x=3$:
Graph schneidet wieder die x-Achse



Allgemein:

- wenn n gerade, NuS ohne VzW, d.h. der Graph berührt nur die x-Achse
- wenn n ungerade, NuS mit VzW, d.h. der Graph schneidet die x-Achse

Wann wechselt eine stetige Funktion das Vorzeichen?

- bei NuS ungerader Ordnung
- bei Polstellen ungerader Ordnung

Bei Nullstellen gerader Ordnung berührt der Graph die x-Achse nur.

TATSACHE 8

Symmetrien bei den Graphen von Polynomfunktionen

Der Funktionsterm enthält nur gerade Potenzen von $x \Rightarrow$

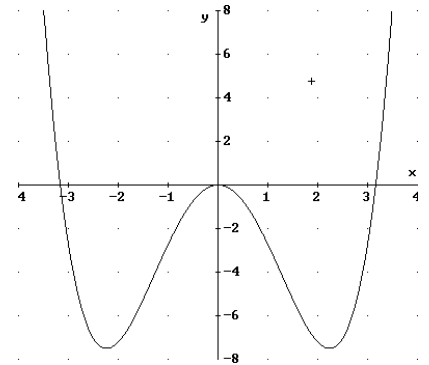
Der Graph ist achsensymmetrisch zur y -Achse, dafür gerades n gilt: $x^n = (-x)^n$

Bei diesen Funktionen ist $f(-x) = f(x)$

Bsp.: $f(x) = 0,3x^4 - 3x^2$:

$$f(-x) = 0,3(-x)^4 - 3(-x)^2 = 0,3(-x)^4 - 3(-x)^2 = 0,3x^4 - 3x^2 = f(x)$$

Wenn $f(x) = f(-x)$ muss der Graph achsensymmetrisch sein.



„Der Funktionsterm enthält nur ungerade Potenzen von x “

\Rightarrow Der Graph ist punktsymmetrisch.

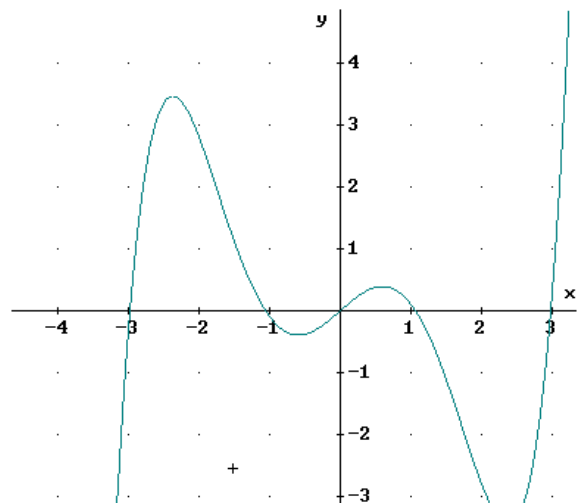
Betrachtet man eine Funktion mit nur ungeraden Potenzen, so ist $f(-x) = -f(x)$,

d.h. ihr Graph ist punktsymmetrisch zum

Ursprung.

Der Symmetriepunkt ist der Ursprung.

Bsp.: $f(x) = 0,1x^5 - x^3 + x$



Siehe auch:

- FOS: S.62 G.1.

TATSACHE 9

Veränderungen von Graphen: $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x)+a$, $f(x+a)$.

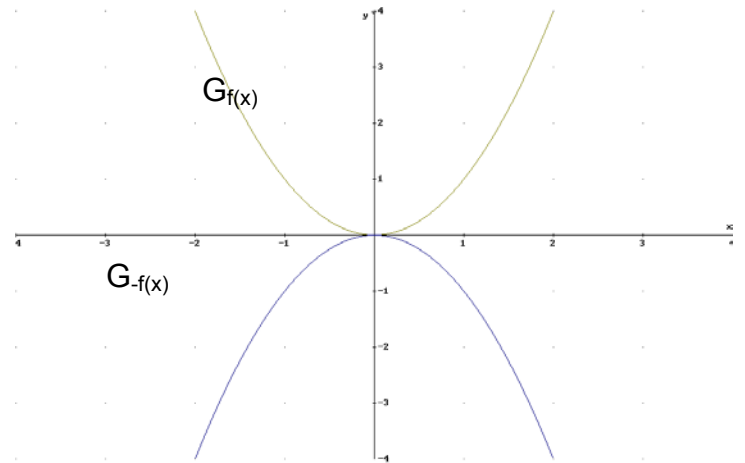
$-f(x)$

Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

$$-f(x) = -x^2$$

Wird der ganze Funktionsterm mit -1 multipliziert, dann wird der Graph an der x -Achse gespiegelt.



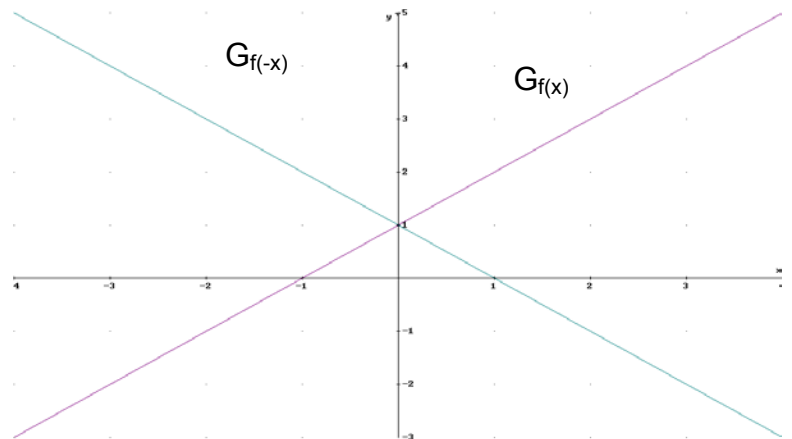
$f(-x)$

Beispiel:

$$f(x) = x+1$$

$$f(-x) = -x + 1$$

Wird nur das x mit -1 multipliziert, dann wird der Graph an der y -Achse gespiegelt.



Deswegen auch Tatsache 8:

Wenn für den Funktionsterm gilt: $f(-x) = f(x)$, dann ist der Graph achsensymmetrisch zur y -Achse.

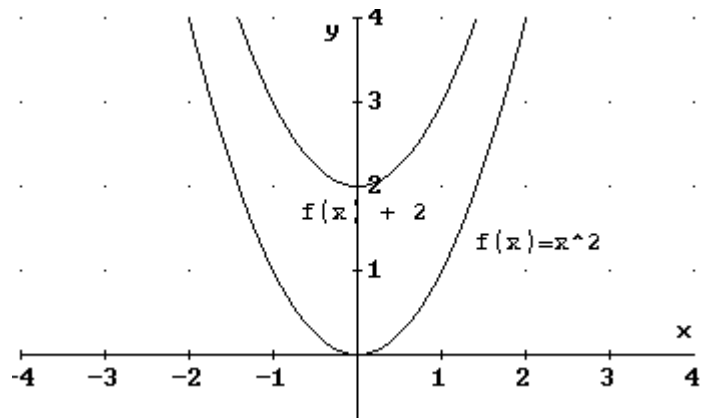
$f(x) + a$

Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = x^2 + 2$$

Wird eine Konstante k zum Funktionsterm addiert, dann wird der Graph um diese Konstante nach oben ($k > 0$) oder nach unten ($k < 0$) geschoben.

 **$f(x+a)$**

Beispiel:

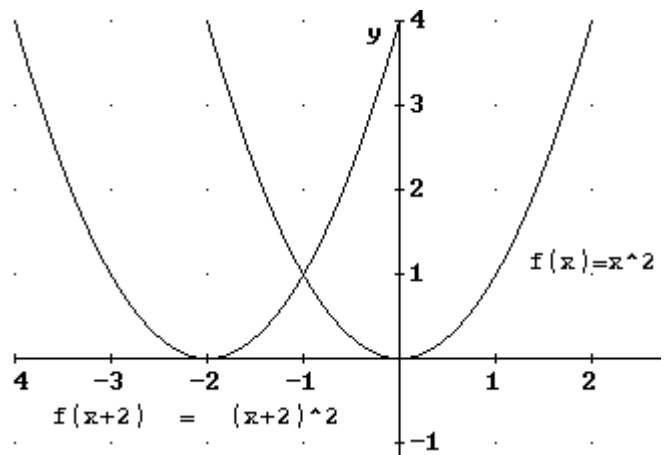
$$f(x) = x^2$$

$$f(x+2) = (x+2)^2$$

Wird die Konstante k nur zum x addiert, dann wird der Graph nach rechts ($k < 0$) bzw. links ($k > 0$) geschoben.

Die Richtung der Verschiebung ist also gerade anders, als man denkt.

Man kann sich das gut an den Nullstellen der beiden Funktion $y = (x+2)^2$ und $y = (x-2)^2$ klarmachen.



TATSACHE 10**Gebrochen-rationale Funktionen: muss noch ergänzt werden****Gebrochenrationale Funktionen**

10.1: Definitionsbereich = $\mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen des Nenners}\}$

10.2: Löcher des Graphen sind gleichzeitige Nullstellen von Zähler und Nenner

Nun kürzen wir den Funktionsterm.

10.2: Nullstellen der Funktion = Nullstellen des Zählers der gekürzten Fassung; senkrechte Asymptoten haben die Gleichung:
 $x = \text{solch eine Z-Nullstelle}$

10.3 Polstellen der Funktion = Nullstellen des Nenners der gekürzten Fassung.

10.4 Waagrechte Asymptoten: wenn $\text{Grad } Z = \text{Grad } N$,
sonst schiefe asymptotische Gerade oder auch Kurven
(letzteres, wenn $\text{Grad } z$ mindestens um 2 größer als $\text{Grad } N$).

TATSACHE 11**Steigung von f in x_0**

Um die Steigung in einem Punkt P eines Funktionsgraphen zu ermitteln, bilde ich zunächst die Sekante durch diesen Punkt P und einen Punkt Q:

$$\text{Formel: } m_s = \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \frac{\text{GK}}{\text{AK}} =$$

$\frac{\text{Differenz der y-Werte}}{\text{Differenz der x-Werte}}$

Beispiel: $y=x^2$ im Punkt (1/1)

$$m_s = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h} = 2+h$$

Die Sekantensteigung beschreibt die durchschnittliche Steigung eines Abschnitts der Funktion zwischen zwei Punkten.

Nun gehe ich zur Tangente über, indem der Abstand der zwei Schnittpunkt der Sekante mit dem Graphen immer

kleiner wird: $m_T = \lim_{h \rightarrow 0} m_s$

→ Steigung in einem Punkt der Funktion:

Der Grenzwert der Sekantensteigung ist n

→ die Tangentensteigung ist n

→ die Funktion hat für p die Steigung n

→ $f'(p) = n$

Inzwischen kennen wir natürlich die Steigungsformel $f'(x)$ für jeden x-Wert dieser Parabel: $f'(x)=2x$.

Also müssen wir nur noch einen x-Wert in diese Steigungsformel einsetzen, um die Steigung zu ermitteln, z.B. $f'(1)=2 \cdot 1 = 2$.

Das ist dann natürlich auch gleichzeitig der Steigungswert m der Tangente an die Parabel im Punkt P(1/1).

Allgemeine Definition:

$$m_T = \lim_{h \rightarrow 0} m_s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

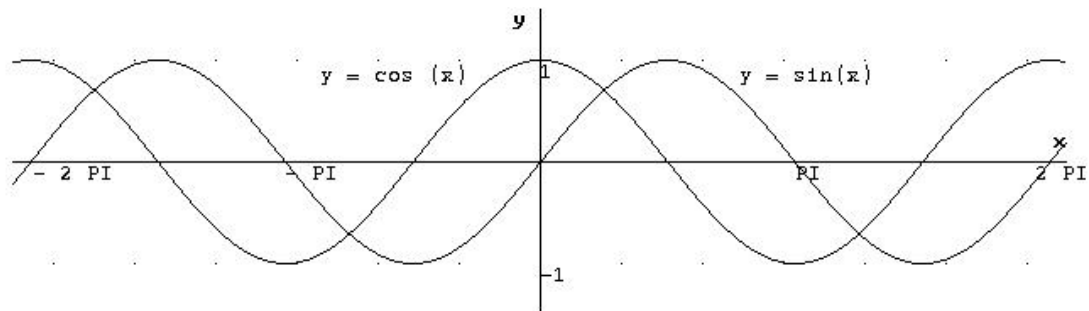
Siehe auch:

- FOS: S.57 ff.

TATSACHE 12

Wichtige Ableitungsregeln: sin/cos, Produkt- und Kettenregel

12.1 Ableitung von sinus- und cosinus- Funktionen



Grund, warum der $\sin(x)$ abgeleitet der $\cos(x)$ ist:

Betrachtet man den $\cos(x)$, so stellt man fest, dass er bei $\pi/2$ einen Vorzeichenwechsel (VzW) $+ \rightarrow -$ hat, was auf ein Maximum der $\sin(x)$ - Funktion schließen lässt.

Auch an der Stelle $3\pi/2$, wo ein VzW $- \rightarrow +$ der $\cos(x)$ - Funktion stattfindet, besitzt die Funktion $\sin(x)$ einen TIP.

Außerdem muss die Ableitung der Funktion $\sin(x)$ periodisch sein, und all diese Kriterien erfüllt der $\cos(x)$.

Analog dazu kann diese Betrachtung auch bei $\cos(x)$, $-\sin(x)$, $-\cos(x)$ und deren Ableitungen durchgeführt werden.

Funktion	Ableitung
$\sin(x)$	$\rightarrow \cos(x)$
$\cos(x)$	$\rightarrow -\sin(x)$

12.2 Produktregel

$$f(x) = u(x) * v(x)$$

$$f'(x) = u(x) * v'(x) + v(x) * u'(x)$$

Was v oder u ist, ist bei der Produktregel egal!

$$\text{Bsp.: } f(x) = x * \sin(x)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \\ u & v & \end{array}$$

$$f'(x) = 1 * \sin x + x * \cos x$$

12.3 Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{v(x) * u'(x) - u(x) * v'(x)}{[v(x)]^2}$$

in Worten: $f'(x) = \frac{NAZ - ZAN}{N^2}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x+1}{x} = \frac{x * 1 - (x+1) * 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

12.4 Kettenregel

$$f'(x) = v'(u(x)) * u'(x)$$

in Worten: äußere Ableitung mal innere Ableitung

Das vergessene Nachdifferenzieren ist einer der beliebtesten Fehler.

1.Beispiel: $f(x) = (3x - 2)^2$ $u(x) = 3x - 2 = z$
 $v(z) = z^2$
 $v(u(x)) = (3x - 2)^2$

$$f'(x) = 2 * z^2 * 3 = 2 * (3x - 2) * 3 = 18x - 12$$

TATSACHE 13**Monotoniekriterium: Bestimmung der Steigung mit Hilfe von f****Geg.:** $f(x)=x^4$ **Ges.:** Monotonie
Steigung (f')**Lös.:** Die Funktion $f : x \mapsto f(x); x \in M \subset D_f$ heißt

a)

Monoton zunehmend in M,

Monoton abnehmend in M,

wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 &\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \\ &\Rightarrow f'(x) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 &\Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1) \\ &\Rightarrow f'(x) \leq 0 \end{aligned}$$

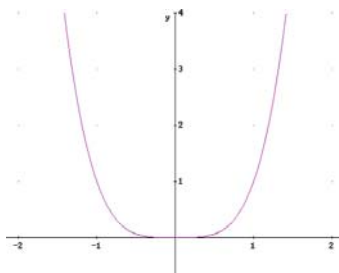
b)

streng/echt monoton zunehmend in M,*streng/echt* monoton abnehmend in M,wenn für alle $x_1, x_2 \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 &\Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \\ &\Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 > x_1 &\Rightarrow f(x_2) < f(x_1) \\ &\Rightarrow f'(x) < 0 \end{aligned}$$

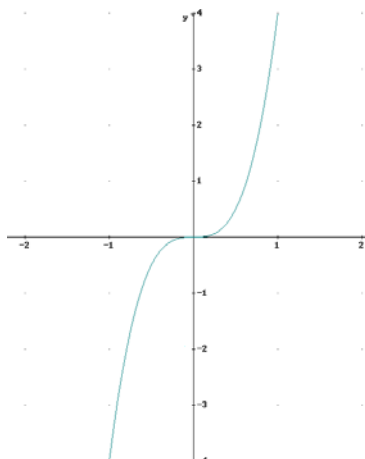
Das steht so in der Formelsammlung.



$$f(x): y = x^4$$

\Rightarrow Die Funktion $y=x^4$ ist im Intervall $]-\infty;0]$ fallend
und im Intervall $[0;+\infty[$ monoton steigend,

da in diesem Intervall $f'(x)$, also die
Steigung immer größer bzw. kleiner 0 ist:



$$f'(x) = 4x^3$$

$$f'(x) > 0; x \in]0;+\infty[$$

$$f'(x) < 0; x \in]-\infty;0[$$

TATSACHE 14**Extrempunkte und Sattelpunkte****14.1 Waagrechte Tangenten**

Wenn die erste Ableitung Null an einer Stelle ist, dann hat der Graph dort eine waagrechte Tangente.

Ob weiterhin ein Extrempunkt oder ein Sattelpunkt vorliegt, muss erst untersucht werden!!

Beispiel: $f'(x)=0$, aber kein Extrempunkt

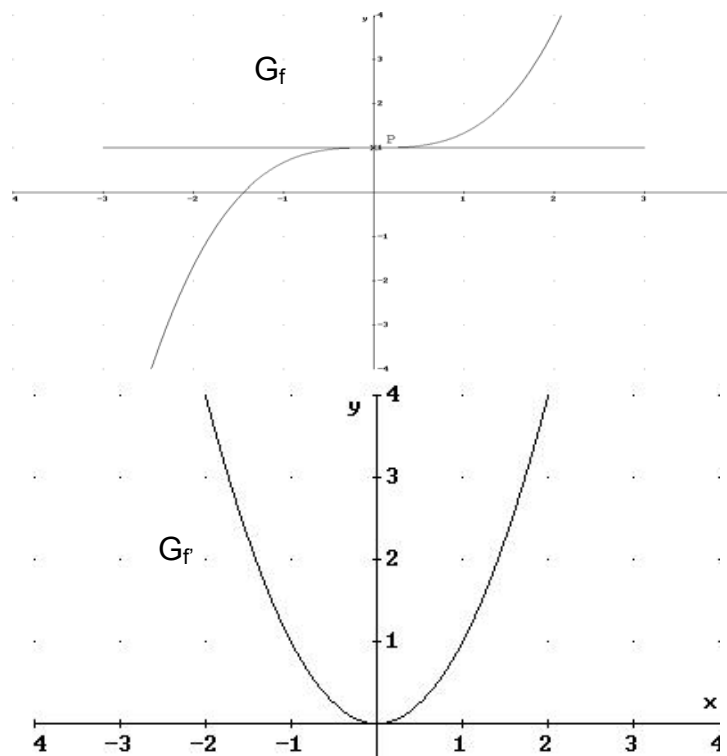
Gegeben ist die Funktion: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$

Wir bilden die 1.Ableitung: $f'(x) = x^2$. f' hat eine Nullstelle bei $x=0$, aber:

Es liegt bei $x=0$ kein Extrempunkt vor, da die Funktion f' ihr Steigungsverhalten nicht wechselt.

=> Es liegt ein sogenannter Sattelpunkt vor.

Da die Ableitung an einer Stelle Null ist, hat der Graph dort eine waagrechte Tangente, wie die Skizze unten verdeutlicht.

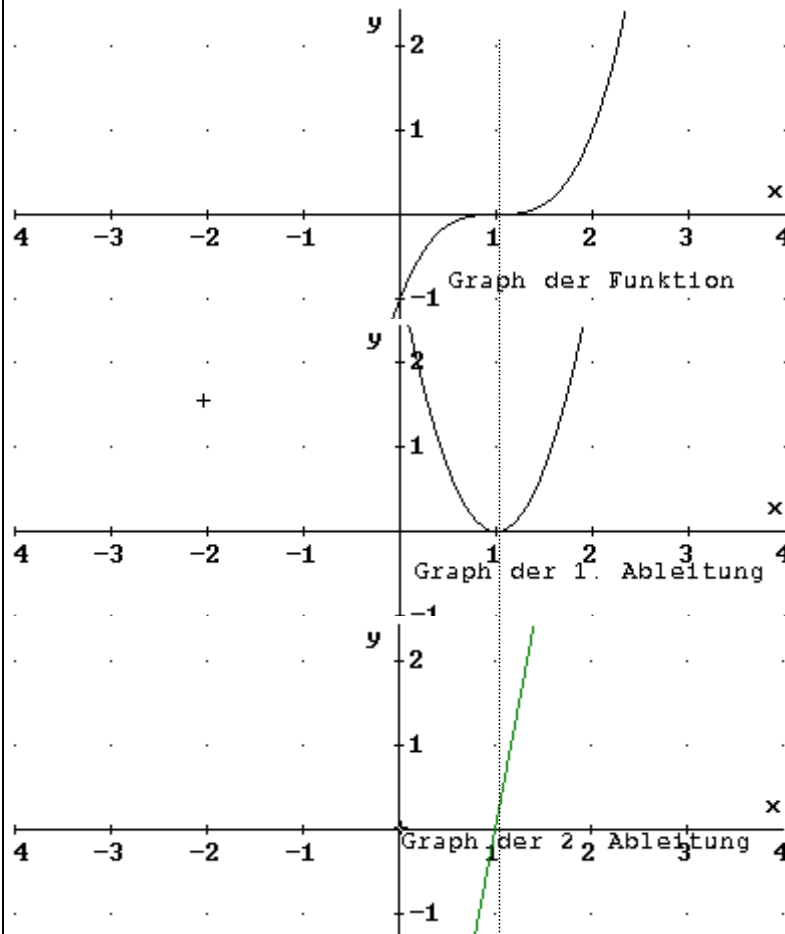


Berechnung der
Tangente in $P(0/1)$:
 $m_t = f'(0) = 0$
 \Rightarrow Tangente: $y = 0 \cdot x + t$
 t ist hier der y -Wert von
 P , also $y = 1$.

Sattelpunkt (SAP) / Terrassenpunkt (TEP)

f hat eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel

f' hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel'

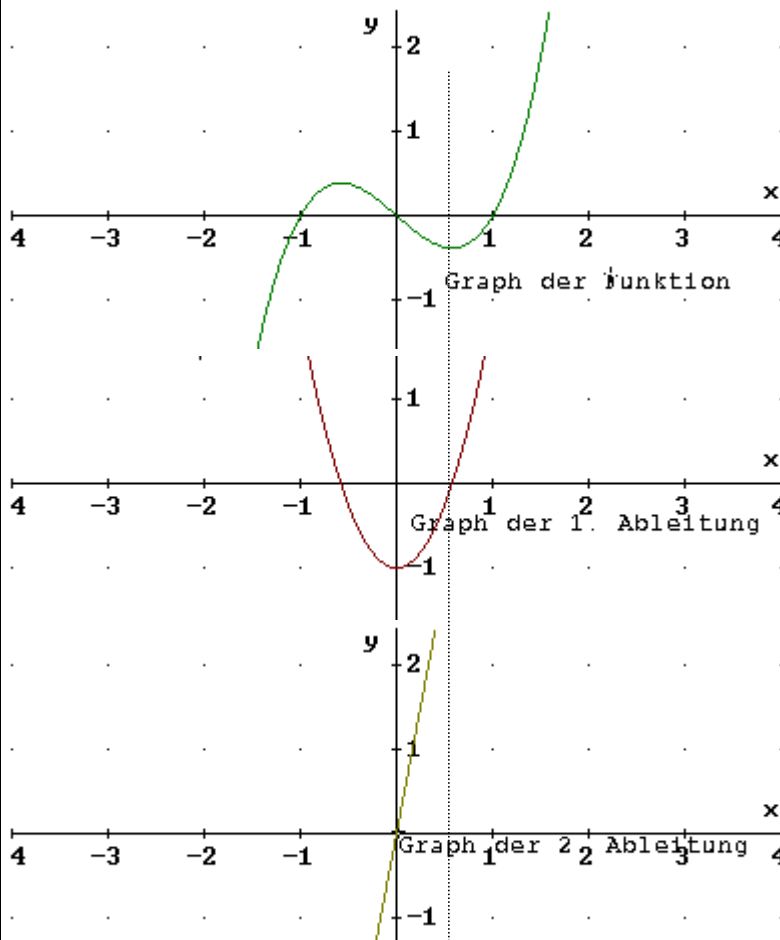


Hieraus folgt, dass Sattelpunkte automatisch auch Wendepunkte sind.

Minimum / Maximum

f' hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

f'' hat keine Nullstelle



Maximum (Max) y-Wert des Hochpunktes
 Minimum (Min) y-Wert des Tiefpunktes

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 = x^2(x-3) \rightarrow \text{NuS: } (0/0), (3/0)$$

Gesucht: Minimum

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$f'(x) = x(3x-6) = 0$$

$$\text{Punkt}_1: x_1 = 0$$

$$\text{Punkt}_2: x_2 = 2$$

$$y_1 = 0$$

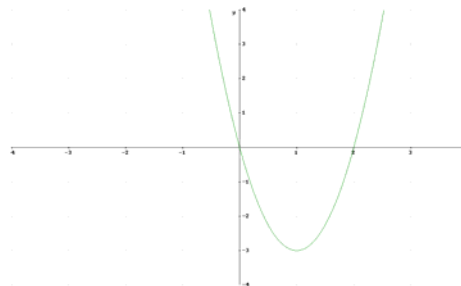
$$y_2 = -4$$

Graph von f hat bei $x=0$ und $x=2$ waagerechte Tangenten, aber noch kein Minimum gezeigt.

Nachweis für Minimum: Skizze von G_f

$\Rightarrow f'$ hat bei $x=2$ VzW - \triangleright +

$\Rightarrow f$ hat bei $x=2$ rel. Minimum



Kriterium für ein Minimum:

Erst fällt f, dann steigt f

Erst $f' < 0$, dann $f' > 0$ Dazwischen wechselt die Ableitung
das Vorzeichen erst - dann +.**Schreibweise:** VzW - \Rightarrow +z.B.: f' hat bei $x=2$ VzW - \Rightarrow + $\Rightarrow f$ hat bei $x = 2$ Min**Kriterium für ein Maximum:**

Erst steigt f, dann fällt f

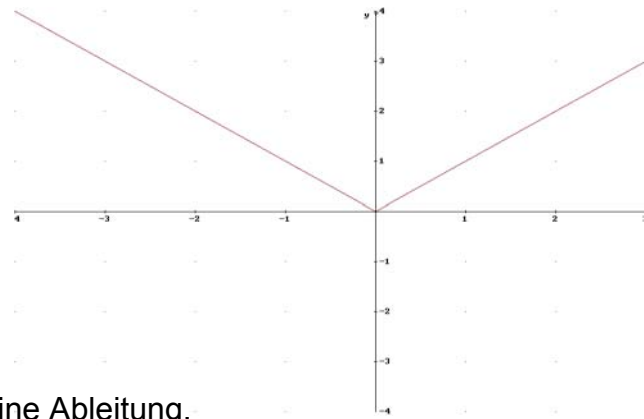
Erst $f' > 0$, dann $f' < 0$ Dazwischen wechselt die Ableitung
das Vorzeichen erst + dann -.**Schreibweise:** VzW + \Rightarrow -z.B.: f' hat bei $x=0$ VzW + \Rightarrow - $\Rightarrow f$ hat bei $x = 0$ Max**14.2 Extrempunkte ohne Ableitung**

Es gibt auch Extrempunkte, ohne dass die 1. Ableitung Null ist:
nämlich wenn G_f einen Knick hat und f' gar nicht existiert.

Beispiel:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad \text{für } x = 0 \text{ existiert keine Ableitung.}$$



Wie könnte Argumentation für TIP aussehen?

$f(x) = |x| \geq 0$ Der kleinstmögliche Funktionswert ist also Null. \Rightarrow bei $x = 0$
gilt: $f(x) = 0 \Rightarrow$ Funktion nimmt sogar absolutes Minimum an.

TATSACHE 15**Wendepunkte**

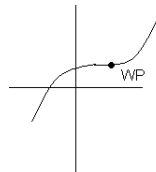
Der Übergang von Rechts- auf Linkskrümmung (bzw. umgekehrt) heißt Wendepunkt (WEP). Wendepunkte liegen an den Extrempunkten von f' bzw. an den NuS mit VzW von f'' .

Fragen

- 1 Vielfachheit der NuS x_0 von f'
- 2 Vielfachheit der NuS x_0 von f''
- 3 Art der Kurvenpunkte $P(x_0/f(x_0))$
- 4 Typischer Verlauf der Kurve bei P

Antworten

- 1 Keine NuS/ kein VzW
- 2 1-fach VzW
- 3 WEP
- 4

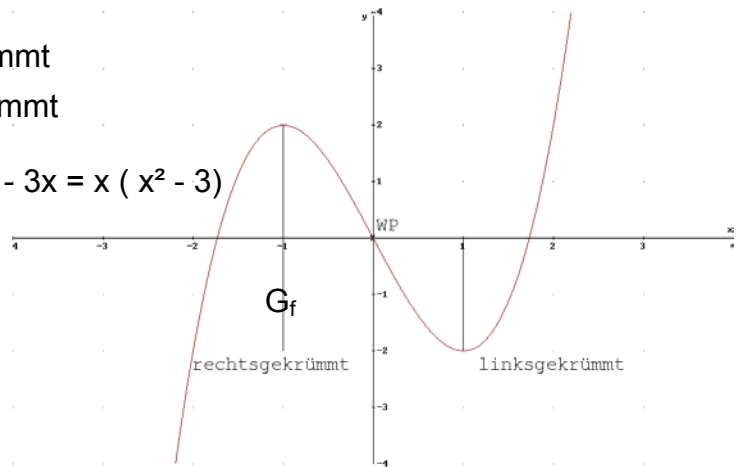


TATSACHE 16**Krümmung**

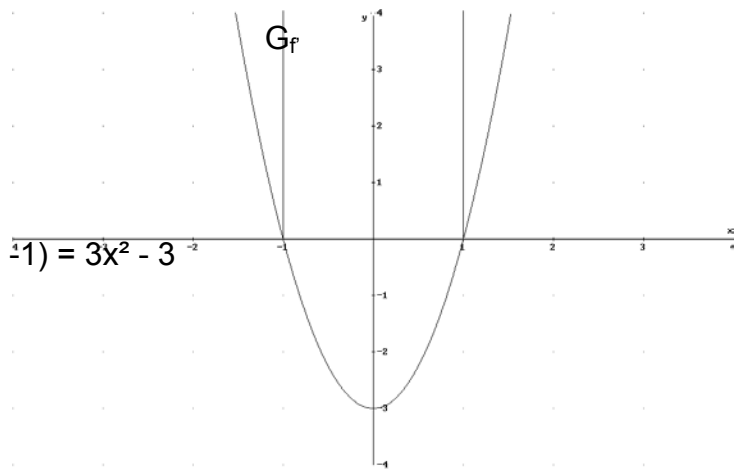
f' positiv \Rightarrow Graph **l**inksgekrümmt

f' **n**egativ \Rightarrow Graph **r**echtgekrümmt

Gegeben ist die Funktion: $f(x) = x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$



1. Ableitung: $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3x^2 - 3$



2. Ableitung: $f''(x) = 6x$

$x < 0$: $f''(x) < 0$

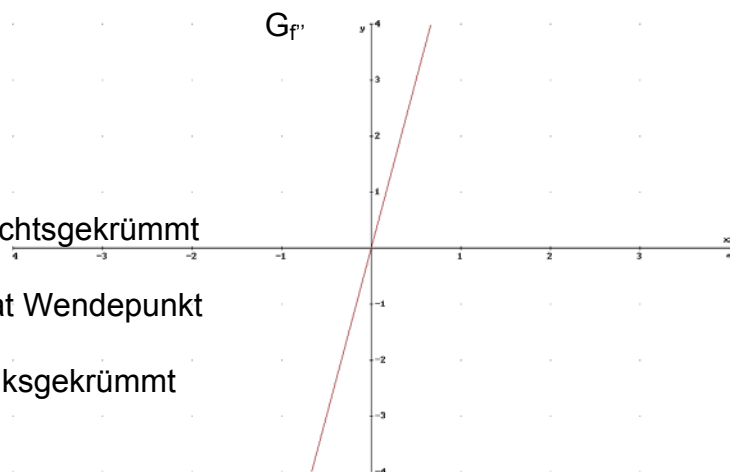
$\Rightarrow G_f$ rechtsgekrümmt

$x = 0$: $f''(x)$ hat VZW

$\Rightarrow G_f$ hat Wendepunkt

$x > 0$: $f''(x) > 0$

$\Rightarrow G_f$ linksgekrümmt



TATSACHE 17**Welche Funktionen sind stetig?**

Stetig sind im Bereich der Schulmathematik alle Funktionen, die sich durch eine einzige Funktionsgleichung darstellen lassen, auch Funktionen mit Brüchen.

Die Stetigkeit von abschnittsweise definierten Funktionen an ihren Nahtstellen muss nachgeprüft werden (Grundaufgabe 28).

TATSACHE 18**Differenzierbarkeit \Rightarrow Stetigkeit**

Ist eine Funktion differenzierbar an einer Stelle x_0 , dann ist sie dort auch stetig (gewesen).

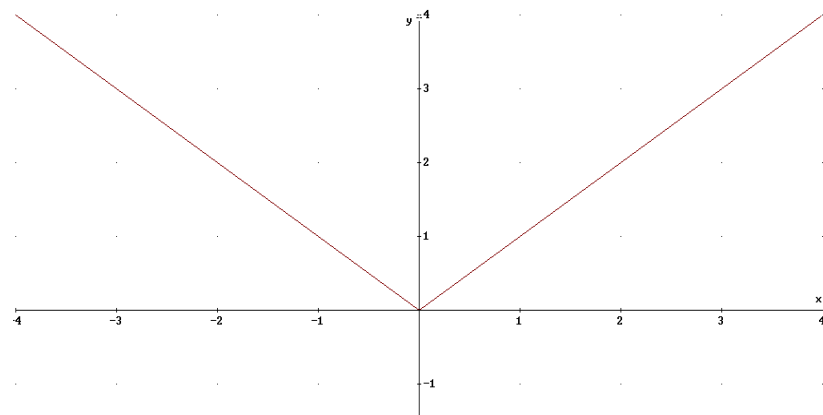
Wenn eine Funktion also stetig an einer Stelle x_0 ist, dann kann sie differenzierbar sein oder nicht.

Beispiel:

$$f(x) = |x|$$

stetig in $x = 0$
(Graph hat keinen Sprung)

Aber nicht differenzierbar in $x = 0$
(Graph hat einen Knick)

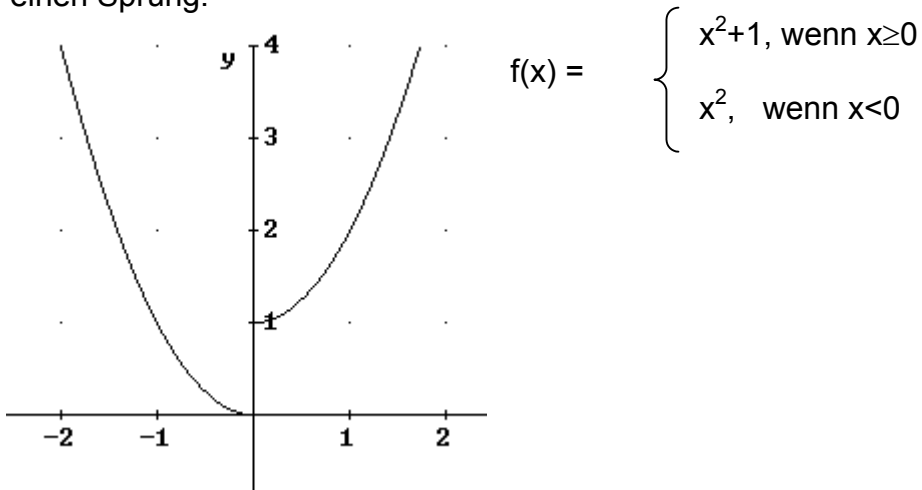


TATSACHE 19

Sprünge und Knicke bei Graphen

18.1 Sprünge

f nicht stetig an einer Stelle im Definitionsbereich \Leftrightarrow der Graph hat dort einen Sprung.

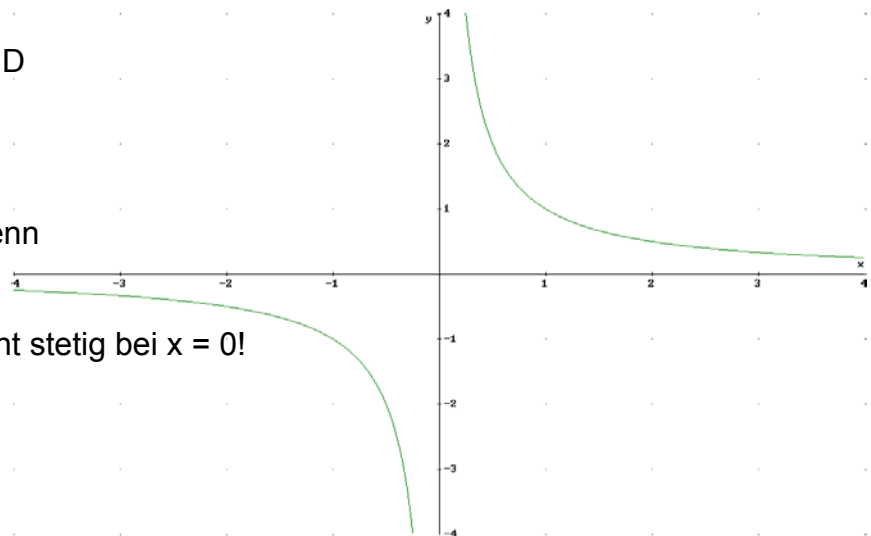


Dies gilt nicht für Definitionslücken, z.B.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = 0 \notin \text{ID}$$

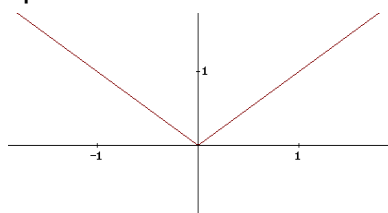
G_f springt bei $x = 0$
 f nicht unstetig bei $x = 0$, denn
 $x = 0$ existiert für f nicht!

f ist aber natürlich auch nicht stetig bei $x = 0$!



18.2 Knicke

f nicht differenzierbar an eine Stelle aus ID_f , an der f stetig ist
 \Leftrightarrow der Graph hat dort einen Knick.



Beispiel: $f(x) = |x|$

Dies ist nicht anwendbar auf Stellen, an denen f noch nicht mal stetig ist, denn hat der Graph einen Sprung, dann kann man gar nicht nach einem Knick fragen.