

Analysisgrundaufgaben

INHALTSVERZEICHNIS

Grundaufgabe 1	Bestimmung von Geradengleichungen	3
Grundaufgabe 2	Neigungswinkel einer Gerade	4
Grundaufgabe 3	Achsen Schnittpunkte	5
Grundaufgabe 4	Schnittpunkte von 2 Kurven (auch: Berührungspunkte)	6
Grundaufgabe 5	Schnittwinkel	7
Grundaufgabe 6	Lote	8
Grundaufgabe 7	Gemeinsame Punkte einer Kurvenschar	9
Grundaufgabe 8	Betragsfunktionen	10
Grundaufgabe 9	Lösung von Ungleichungen mit Skizze	12
Grundaufgabe 10	Verkettung von 2 Funktionen	13
Grundaufgabe 11	Umkehrfunktion	14
Grundaufgabe 12	Scheitel einer Parabel	15
Grundaufgabe 13	Ortslinie bzw. Ortskurve bei einer Schar	16
Grundaufgabe 14	Nullstellen eines Polynoms	17
Grundaufgabe 15a	Symmetrie des Graphen zum Koordinatensystem	18
Grundaufgabe 15b	Symmetrie zu anderen Achsen oder Punkten	19
Grundaufgabe 16	Verhalten von rationalen Funktionen im Unendlichen	21

Grundaufgabe 17	
Verlauf des Graphen ober- / unterhalb der Asymptote	23
Grundaufgabe 18	
Tangentengleichungen	24
Grundaufgabe 19	
Normalengleichung	25
Grundaufgabe 20	
Tangente von einem Punkt außerhalb der Kurve an die Kurve (d.h. der Berührungspunkt ist nicht gegeben).....	26
Grundaufgabe 21	
Extrempunkte (EP) und Sattelpunkte (SAP).....	28
Grundaufgabe 22a	
Graph von f bekannt – skizziere den Graphen von f'	31
Grundaufgabe 22b	
Graph von f' bekannt, skizziere den Graphen von f	32
Grundaufgabe 23	
Wendepunkte	33
Grundaufgabe 24	
Funktionsgraphen skizzieren, wenn man keine Nullstelle kennt.....	35
Grundaufgabe 25	
Monotonieverhalten bei gebrochen–rationalen Funktionen.....	36
Grundaufgabe 26	
Stetigkeit bei abschnittsweise definierten Funktionen.	37
Grundaufgabe 27	
Stetige Fortsetzung von Funktionen.....	38
Grundaufgabe 28	
Wie man Funktionen mit Betrag ableitet.....	39
Grundaufgabe 29	
Wie man abschnittsweise definierte Funktionen ableitet	40
Grundaufgabe 30	
Grenzwertbestimmung nach L'Hospital	42

GRUNDAUFGABE 1

Bestimmung von Geradengleichungen

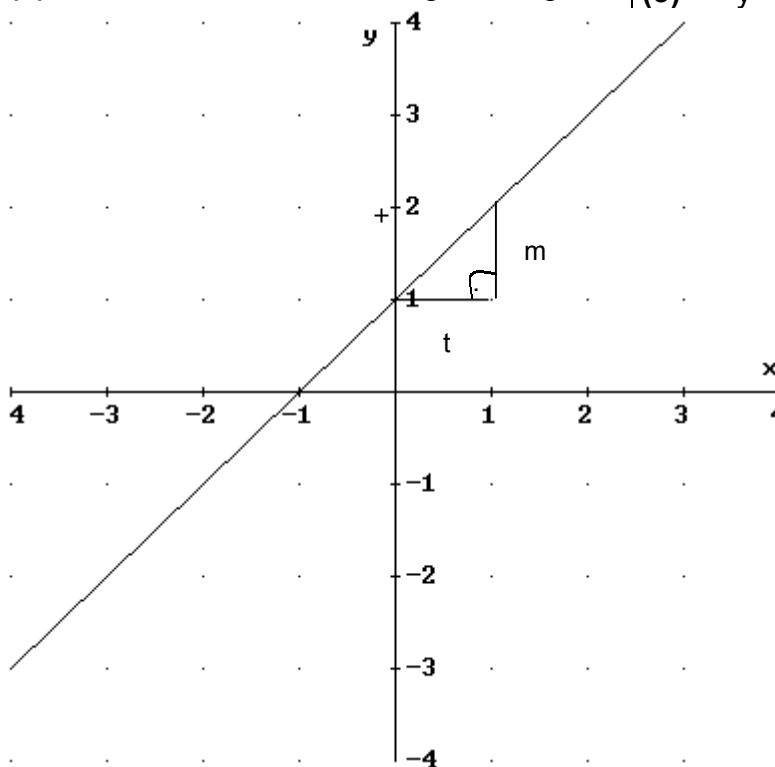
Die Gleichung $y = mx + t$ hat als Graphen eine Gerade mit der Steigung m und dem Abschnitt t auf der y -Achse.

Bestimmung der Steigung m vgl.
Grundaufgabe 2 (FoS S. 58 C1)

$$(1) m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

(2) Bestimmung des y -Achsenabschnitts t :
Punkt $P(x; y)$ in Geradengleichung
einsetzen und nach t auflösen

(3) Anschreiben der Geradengleichung



Beispiel:

Gerade durch $P(1; 2)$ und $Q(2; 3)$
 $y = m x + t$

$$(1) m = \frac{2 - 3}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1 \rightarrow y = x + t$$

$$(2) P \in g \\ 2 = 1 + t \\ \rightarrow t = 1$$

$$(3) y = 1 \cdot x + 1$$

Alternativ:

P und Q einsetzen $\rightarrow 2 \times 2$ Gleichungssystem

$$y = mx + t$$

$$P \in g : 2 = m \cdot 1 + t \quad (I)$$

$$Q \in g : 3 = m \cdot 2 + t \quad (II)$$

$$I - II : -1 = -m$$

$$m = 1$$

$$\text{in I : } t = 2 - m \Leftrightarrow t = 2 - 1 = 1$$

GRUNDAUFGABE 2

Neigungswinkel einer Gerade

2.1 normale Gerade:

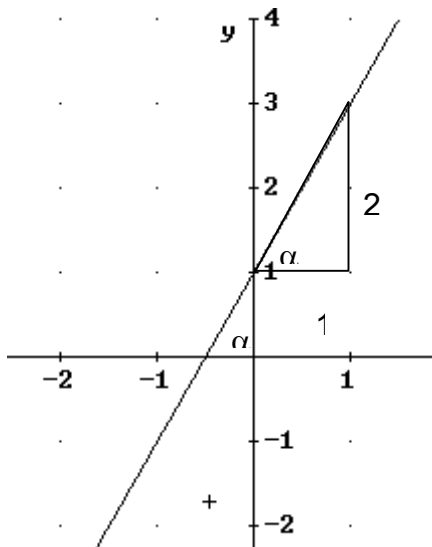
$$m = \tan \alpha \rightarrow \alpha = \tan^{-1} m \text{ (TR)}$$

FoS S. 58 C1

2.2 Tangente

$$m = f'(x_B) \quad b = \text{Berührungspunkt}$$

FoS S. 40



2.1 normale Gerade der Form $y=mx+t$

z.B. $y = 2x + 1$

$$m = \tan \alpha = \frac{GK}{AK} = \frac{2}{1}$$

Taschenrechnerberechnung:

2nd oder SHIFT

$$\tan \approx 78,69^\circ$$

Ist der Steigungsfaktor m negativ, so ist auch der Neigungswinkel negativ.

2.2 Tangente

z.B. Tangente an die Parabel $y = 2x^2 - 1$ im Punkt $(0,5 \mid -0,5)$

z.B. $f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x$

Steigung der Tangente =

Steigung der Graphen =

Ableitung am Berührungspunkt \Rightarrow

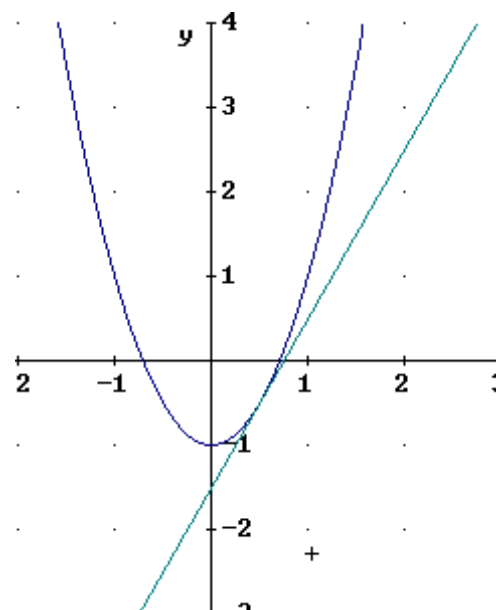
Einsetzen des x -Wertes $(0,5)$ in die erste Ableitung, um die Steigung der Funktion im Punkt P zu bestimmen.

In unserem Beispiel für den x -Wert $0,5$:

$$f'(0,5) = 2$$

\Rightarrow da wir wissen, dass das Ergebnis der ersten Ableitung die Steigung der Tangente ist, können wir nun den Neigungswinkel wie in Aufgabe a.) berechnen.

$$m = 2 \Rightarrow \tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63,43^\circ$$



GRUNDAUFGABE 3

Achsenschnittpunkte

- 3.1 S_x : x-Wert Nullstelle, y-Werte 0: $S_x(\text{Nus}/0)$
 3.2 S_y : x-Wert 0, y-Wert = $f(0)$: $S_y(0/f(0))$

3.1 Schnittpunkt mit der x-Achse (S_x):

„Kochrezept“:

- für $y = 0$ einsetzen
- nach x auflösen
- Koordinaten angeben

Bsp.: $y = 0,25x^2 - 1$
 $0,25x^2 - 1 = 0$
 $0,25x^2 = 1$
 $x^2 = 4$
 $x = \pm 2$
 $\rightarrow S_{x1}(2 / 0); S_{x2}(-2 / 0)$

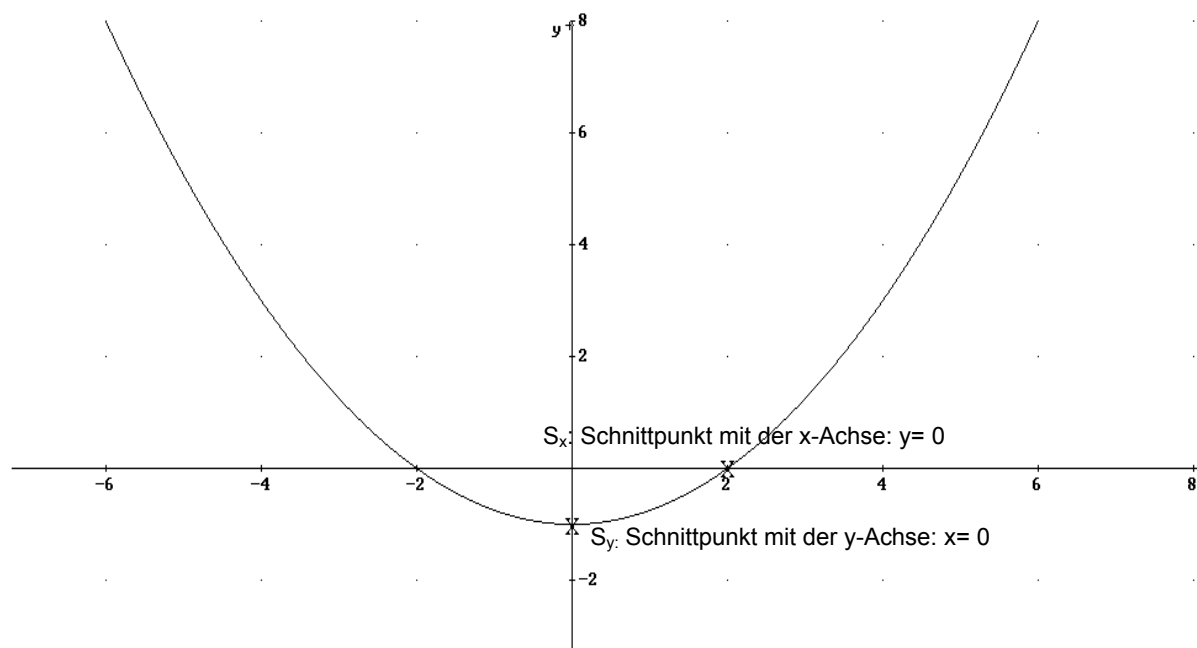
Achtung! Die Nullstelle ist nur die x-Koordinate, aber der Schnittpunkt hat 2 Koordinaten!!

3.2 Schnittpunkt mit der y-Achse (S_y):

„Kochrezept“:

- für $x = 0$ einsetzen
- y berechnen
- Koordinate(n) angeben

Bsp.: $y = 0,25x^2 - 1$
 $y = 0,25 \cdot 0^2 - 1$
 $y = -1$
 $S_y(0 / -1)$



Siehe auch:
 FoS S. 40/ S. 58

GRUNDAUFGABE 4

Schnittpunkte von 2 Kurven (auch: Berührungspunkte)

$$f(x) = x^2 + 2$$

$$g(x) = x^2 + 2x - 4$$

Ermitteln des Schnittpunkts S durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen, und nach x auflösen.

$$x^2 + 2 = x^2 + 2x - 4 \quad | -x^2 - 2$$

$$0 = 2x - 6 \quad | +6$$

$$-2x = -6 \quad | :(-2)$$

$$x = 3$$

Den ermittelten x-Wert in eine der Funktionen einsetzen \rightarrow y-Wert

$$f(3) = x^2 + 2 = 9 + 2 = 11$$

$$\rightarrow y = 11$$

$$S(3/11)$$

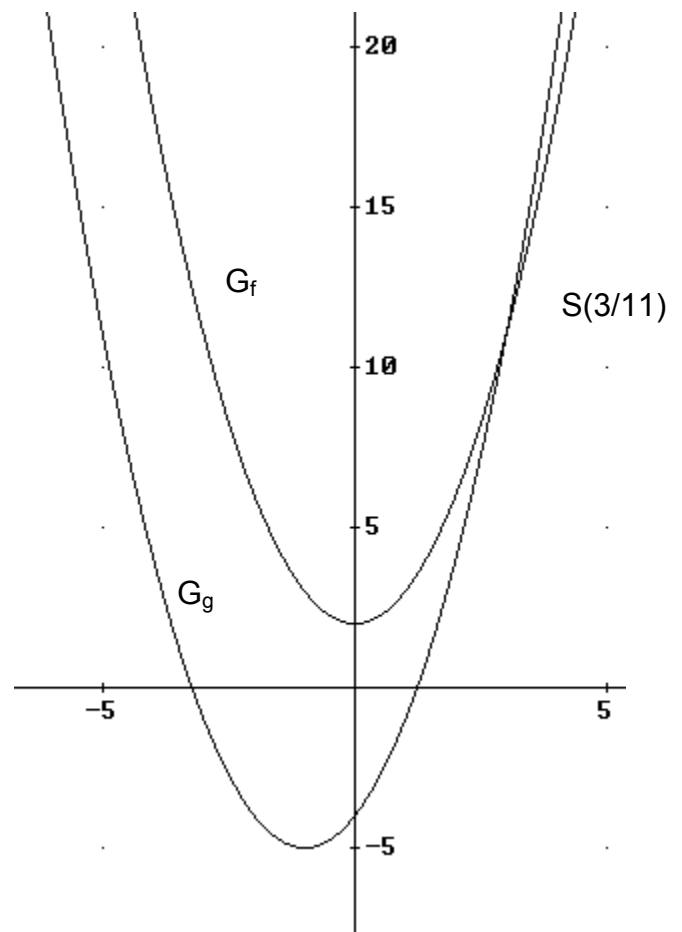
Kontrollmöglichkeit: in die andere Funktion einsetzen

$$g(3) = 9 + 6 - 4 = 11$$

Achtung:

Beliebter Fehler: $f(x) = g(x)$

Das ist falsch, weil die beiden Funktionen nicht identisch sind.



GRUNDAUFGABE 5

Schnittwinkel

5.1 Schnittwinkel von Geraden

- α_g und α_h bestimmen, $\varphi = |\alpha_g - \alpha_h|$
- für $\alpha \neq 90^\circ$: $\tan \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

5.2. Schnittwinkel von Kurven

Man nimmt $m_{g,h}$ der Tangenten im Schnittpunkt

5.1 Schnittwinkel von Geraden

Möglichkeit A

- i) Bestimmung der Winkel α_1 und α_2 , unter denen die jeweiligen Graphen die x-Achse bzw. eine Parallele zur x-Achse schneiden; die Winkel α_1 und α_2 lassen sich aus der Gleichung $\tan \alpha = m$ errechnen (ist also die Steigung einer Funktion negativ, so ist auch der Winkel α negativ).
- ii) der Schnittwinkel φ ist der Betrag aus der Differenz von α_1 und α_2 , also gilt: $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|$

Möglichkeit B

- i) Bestimmung der Steigungen der zwei sich schneidenden Geraden
- ii) Steigungen einsetzen in :

$$\tan \varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

Beispiel: $f_1(x) = -x + 3$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x + 1,5$

A $\tan \alpha_1 = m_1 = -1 \rightarrow \alpha_1 = -45^\circ$ (Taschenrechner: $-1 \cdot 2^{\text{nd}} \tan$)
 $\tan \alpha_2 = m_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 \approx 26,6^\circ$
 $\varphi = |(-45^\circ) - 26,6^\circ| = 71,6^\circ$

B $\tan \varphi = \left| \frac{(-1) - 0,5}{1 + (-1) \cdot 0,5} \right| \approx 3 \rightarrow \varphi \approx 71,6^\circ$

5.2 Schnittwinkel von zwei Kurven

- i) Bestimmung der Tangentensteigung der Kurven im Schnittpunkt
- ii) mit den errechneten Steigungen und der Formel aus 5.1 B den Schnittwinkel φ berechnen.

Beispiel: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^3$ gesucht φ bei $S(1;1)$

(i) $f'_1(x) = 2x$; $f'_1(1) = 2 = m_1$ (Tangentensteigung)
 $f'_2(x) = 3x^2$; $f'_2(1) = 3 = m_2$ (Tangentensteigung)

(ii) $\tan \varphi = \left| \frac{2 - 3}{1 + 2 \cdot 3} \right| = -\frac{1}{7} \rightarrow \varphi \approx 8,1^\circ$

Siehe auch:
FoS Seite 83 / C.2.a

GRUNDAUFGABE 6

Lote

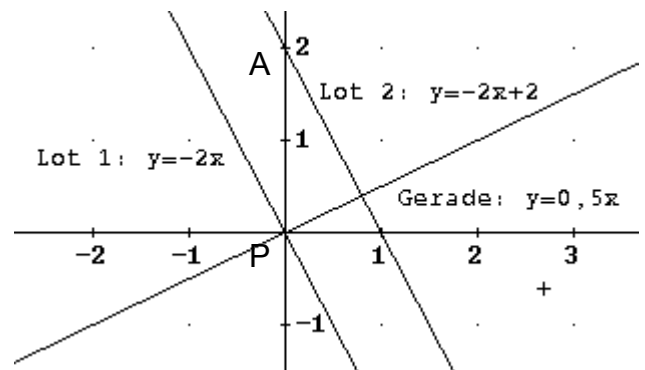
6.1 Lot in einem Geradenpunkt errichten

6.2 Lot auf eine Gerade errichten von einem Punkt außerhalb der Gerade

6.1 Lot in einem Geradenpunkt errichten

Beispiel: $y = \frac{1}{2}x$ P (0/0)

- Steigung des Lots nach der Formel $m \cdot m_{\text{Lot}} = -1$:
 $m = -0,5 \Rightarrow m_l = -2 \Rightarrow$
 Gleichung des Lots l: $y = -2x + t$
- Koordinaten von P einsetzen
 $P \in l: 0 = -2 \cdot 0 + t \Rightarrow t = 0$
 $\Rightarrow l: y = -2x$



6.2 Lot auf eine Gerade errichten von einem Punkt außerhalb der Gerade

$$y = \frac{1}{2}x; A (0/2)$$

Steigung des Lots nach der Formel $m_1 \cdot m_2 = -1$ (FoS S. 83 C 2c)

hier: $m_1 = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \cdot m_2 = -1 \Leftrightarrow m_2 = -2$$

\Rightarrow das Lot hat die Steigung $m = -2$ $l: y = -2x + t$

Um den t-Abschnitt von l zu bestimmen, gehen wir vor wie in Grundaufgabe 1:

Koordinaten von A einsetzen:

$$A \in l: 2 = -2 \cdot 0 + t \Rightarrow t = 2 \Rightarrow l: y = -2x + 2$$

(natürlich erkennt man auch ohne Rechnung, dass $t = 2$, wenn l durch A (0/2) läuft).

Den Geradenfußpunkt F erhält man als Schnitt von g und l, siehe Grundaufgabe 4.

GRUNDAUFGABE 7

Gemeinsame Punkte einer Kurvenschar

Es gibt 3 Möglichkeiten:

- A) Punkt aus der Zeichnung ablesen bzw. vermuten, dann in die Gleichung der Schar einsetzen
- B) Gemeinsamen Punkt von 2 Graphen bestimmen (siehe Grundaufgabe 4)
→ man hat eine Vermutung wie in A, den vermuteten Punkt wieder einsetzen

- C) allgemeiner Ansatz: $f_{a_1}(x_G) = f_{a_2}(x_G)$
(G ist der gemeinsame Punkt).

Dieser Ansatz führt dann zu einem gemeinsamen Punkt, wenn die Parameter a_1 bzw. a_2 entfallen, d.h. unabhängig von a derselbe gemeinsame Punkt herauskommt; er ist sehr elegant, aber erfordert etwas Algebra-Sicherheit).

Beispiel

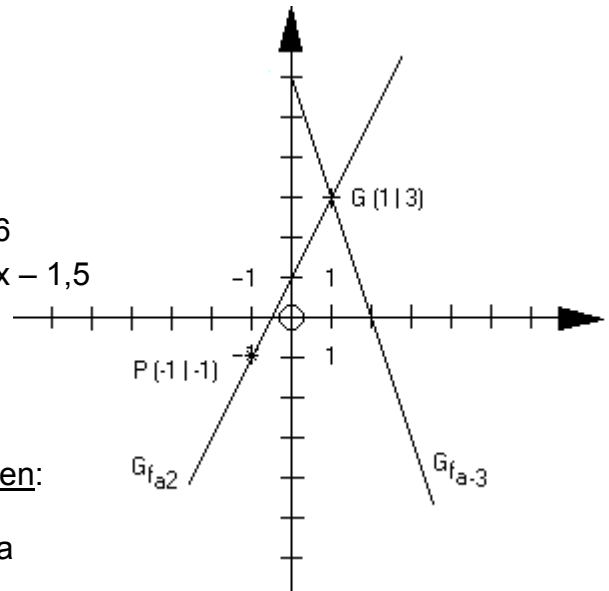
$$f_a(x) = a x + 3 - a$$

Einige Funktionen dieser Schar:

$$a = 2: \quad f_2(x) = 2x + 3 - 2 = 2x + 1$$

$$a = -3 \quad f_{-3}(x) = -3x + 3 - (-3) = -3x + 6$$

$$a = 4,5 \quad f_{4,5}(x) = 4,5x + 3 - 4,5 = 4,5x - 1,5$$



- A) Vermuteter Punkt:** P (1/3)

Vermuteten Punkt

in allgemeine Funktionsgleichung einsetzen:

$$f_a(1) = a \cdot 1 + 3 - a = 3$$

→ P liegt auf Graph von f_a für alle a

- B) Gemeinsamen Punkt von zwei Graphen bestimmen:**

Schnittpunkt der):

$$\text{Also } 2x + 1 = -3x + 6 \quad | +3x - 1$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

$$y = 3 \Rightarrow P(1/3) \text{ IST gemeinsamer Punkt Graphen von } f_2(x) \text{ und } f_{-3}(x)$$

P wird als gemeinsamer Punkt der Schar VERMUTET.

Vermuteten Punkt in allgemeine Gleichung einsetzen:

$$f_a(1) = a_1 + 3 - a = 3 \rightarrow P \text{ auf allen Geraden der Schar}$$

(Dieser letzte Schritt wird gerne vergessen)

- C) Allgemeiner Ansatz :**

$$G_{f_{a_1}} \cap G_{f_{a_2}} \quad a_1 x + 3 - a_1 = a_2 x + 3 - a_2$$

$$a_1 x - a_2 x = a_1 - a_2$$

$$\text{nach } x \text{ auflösen: } x(a_1 - a_2) = a_1 - a_2 \quad | : (a_1 - a_2)$$

$$x = 1 \quad a_1 - a_2 \neq 0$$

$$\text{weil } a_1 \neq a_2$$

GRUNDAUFGABE 8

Betragsfunktionen

Wie schreibt man Betragsfunktionen abschnittsweise auf (also "betragsfrei")?

Allgemeine Definition des Betrags:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

a steht für einen Term; $|a|$ ist stets eine nichtnegative Zahl

Beim abschnittweisen Aufschreiben einer Betragsfunktion geht man nach dieser Definition vor:

$$|\text{Term}| = \begin{cases} \text{Term}; & \text{wenn Term} \geq 0 \\ -\text{Term}, & \text{wenn Term} < 0 \end{cases}$$

Bei der positiven „Teilfunktion“ werden die Absolutstriche durch Klammern ersetzt und bei der negativen „Teilfunktion“ durch Klammern mit vorgesetztem Minuszeichen.

Wir betrachten eine Betragsfunktion als **Beispiel**: $f(x) = 2 - 2 |0,5x + 1|$

Schritt 1: Anwenden der Betragsdefinition:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2 \cdot (0,5x + 1) & \text{für } 0,5x + 1 \geq 0 \text{ (Betragsinhalt, NICHT: Funktionsterm)} \\ 2 - 2 [-(0,5x + 1)] & \text{für } 0,5x + 1 < 0 \end{cases}$$

Schritt 2: Nebenrechnungen mit dem Ziel der Vereinfachung

Nebenrechnung 1: Bedingung vereinfachen:

wann ist $0,5x + 1 \geq 0$?

$$0,5x \geq -1$$

$$x \geq -2$$

Nebenrechnung 2: Funktionsterm vereinfachen

$$2 - 2(0,5x + 1) = 2 - x - 2 = -x$$

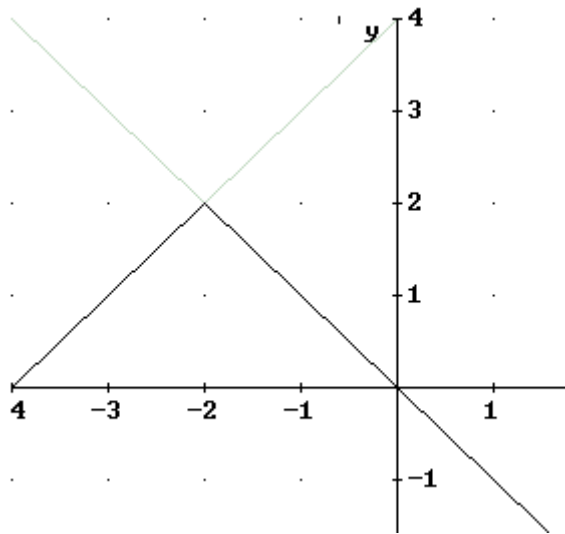
$$2 - 2[-(0,5x + 1)] = 2 + 2(0,5x + 1) = 2 + x + 2 = 4 + x$$

Nun ist die Vereinfachung möglich: :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{wenn } x \geq -2 \\ x + 4 & \text{wenn } x < -2 \end{cases}$$

Schritt 3: Graph zeichnen

Einzelfunktionen im Koordinatensystem eintragen, und zwar jede nur in ihrem speziellen Definitionsbereich!



Nur die schwarz gezeichneten Linien (umgekehrtes V!) bilden gemeinsam den Funktionsgraphen.

Um den Graph einer Betragsfunktion zu zeichnen, ...

- Schritt 1. trägt man beide „Einzelgraphen“ gestrichelt ins Koordinatensystem ein
- Schritt 2. betrachtet man die Definitionsmengen der „Einzelfunktionen“ und kennzeichnet den zugehörigen Graph mit schwarz,
- Schritt 3. muss man beide Graphen der „Einzelfunktionen“ zusammen sehen.

GRUNDAUFGABE 9

Lösung von Ungleichungen mit Skizze

Produkt- und Quotientenungleichungen

Allgemein:

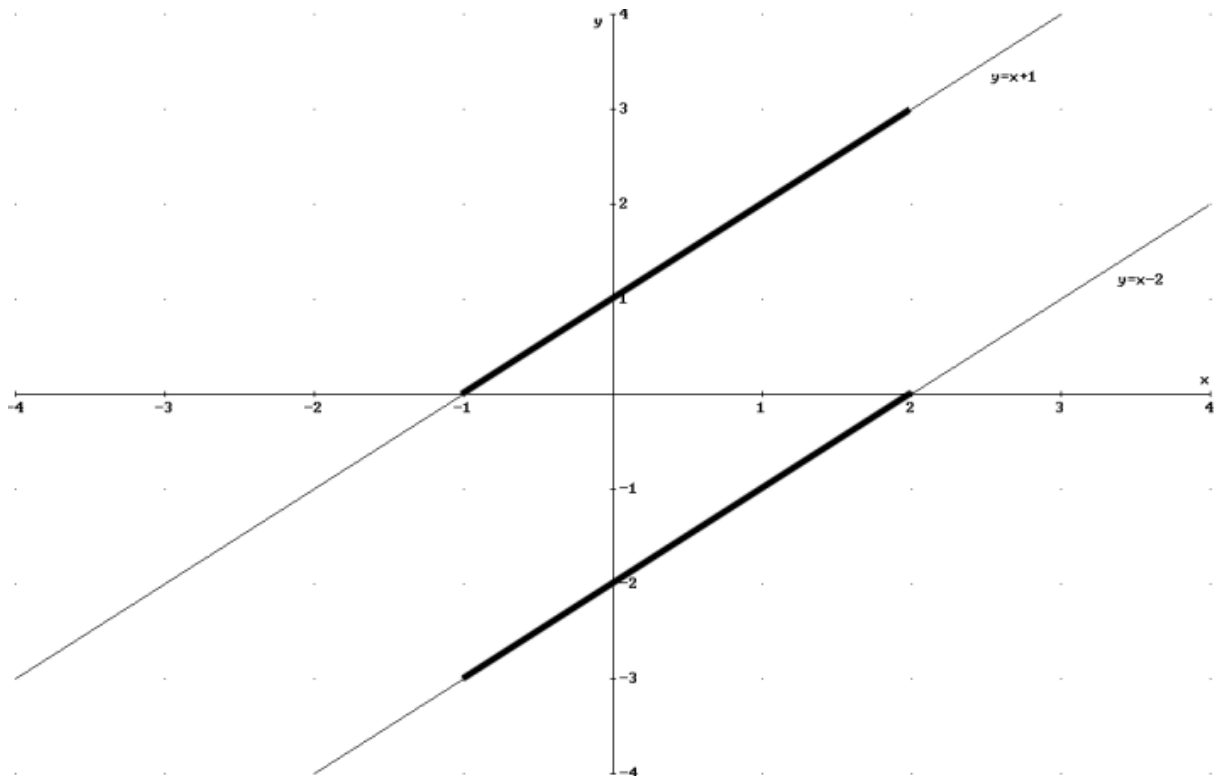
- (i) Die Faktoren bzw. den Nenner und Zähler als Geraden zeichnen. ($y = x + 1$ und $y = x - 2$)
- (ii) Für den x -Wert, an dem eine Gerade im Positiven positiv und eine Gerade im Negativen verläuft, ist die Ungleichung kleiner Null. Verlaufen beide Geraden entweder im Positiven oder im Negativen, ist die Ungleichung größer Null.

Beispiel:

$$\frac{x + 1}{x - 2} < 0:$$

- i) Nenner ($y = x - 2$) und Zähler ($y = x + 1$) als Geraden zeichnen.
- ii) Da für $-1 < x < 2$ eine Gerade im Positiven und eine im Negativen verläuft, ist für $] -1 ; 2[$ die Ungleichung kleiner Null.

Folglich ist der Bruch größer Null für $] -\infty ; -1[$ und $] 2 ; \infty[$. $\Rightarrow L =] -1 ; 2[$



GRUNDAUFGABE 10

Verkettung von 2 Funktionen

Beispiele: $g(x) = x^2$, $h(x) = 2x + 1$, $g \circ h$, $h \circ g$

Allgemeine Regel der Verkettung

$$g \circ h(x) = g(h(x))$$

Erklärung anhand eines Beispiels: $f(x) = |x+2|$, also $h(x) = x+2$, $g(x) = |x|$
 $x \rightarrow z = x+2 \rightarrow y = |x+2|$

$$g(z) = g(x+2) = g(h(x)) \quad x \xrightarrow{h} x+2 \xrightarrow{g} |x+2|$$

Man schreibt auch:

$$g(h(x)) = g \circ f \quad (\text{"g nach h"})$$

Was bedeutet $h \circ g$ ($h(g(x))$)?

$$g(x) = |x| = z$$

$$f(z) = z + 2 = |x| + 2 \quad x \xrightarrow{g} |x| \xrightarrow{h} |x| + 2$$

Im Allgemeinen ist die Verkettung von Funktionen **nicht kommutativ** (vertauschbar).

Beispiele dafür:

$$g(x) = x^2; \quad h(x) = 2x + 1$$

$$\begin{aligned} g \circ h: & \quad g(h(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 \\ h \circ g: & \quad h(g(x)) = h(x^2) = 2x^2+1 \end{aligned}$$

GRUNDAUFGABE 11

Umkehrfunktion

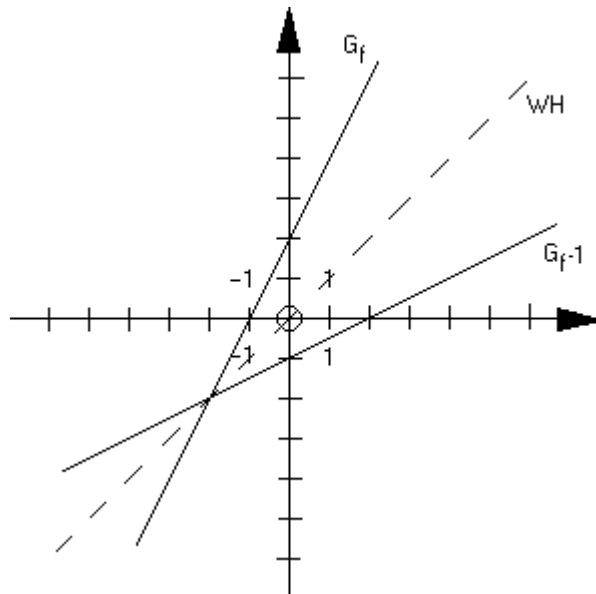
11.1 Graph:
an der Winkelhalbierenden I/III spiegeln

11.2 Gleichung:
Zuerst nach x auflösen, dann x/y vertauschen

11.1 Graph

Der Graph der Umkehrfunktion einer Funktion kann zeichnerisch bestimmt werden, indem man den Graphen der Ausgangsfunktion einfach an der Winkelhalbierenden durch den 1. und 3. Quadranten spiegelt, wie es dieses einfache Beispiel zeigt :

$$f(x) = 2x + 2$$



11.2 Gleichung

Die Gleichung einer Umkehrfunktion (f^{-1}) wird immer nach dem gleichen Schema bestimmt:

-Man löst die ursprüngliche Funktionsgleichung nach x auf:

$$f: y = 2x + 2$$

$$f: x = \frac{y-2}{2}$$

$$f: x = \frac{1}{2}y - 1$$

-Dann werden x und y vertauscht, so erhält man f^{-1} :

$$f^{-1}: y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = 0,5x - 1$$

Aus der Spiegelung an der Winkelhalbierenden folgt eine Vertauschung der

x- und y-Achse, also gilt: $D_f = W_{f^{-1}}$ und $W_f = D_{f^{-1}}$

GRUNDAUFGABE 12

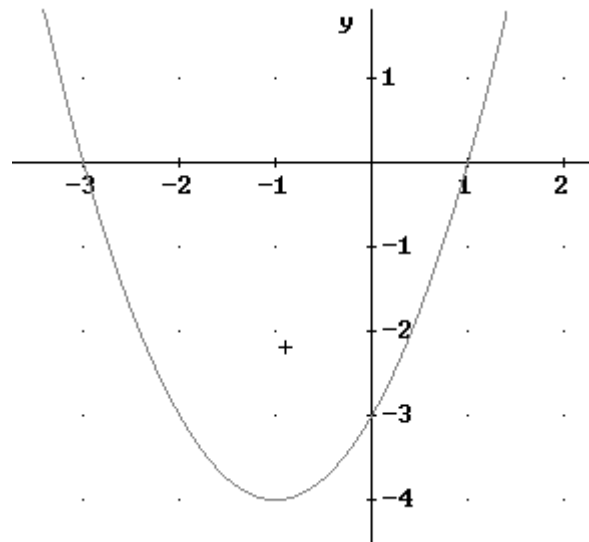
Scheitel einer Parabel

12. 1 Möglichkeit 1: Der Scheitel liegt symmetrisch zwischen den beiden Nullstellen

- i. es gilt: Scheitel = $(\text{NUS1} + \text{NUS2})/2$

Beispiel: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

- ii) NUS1 bei $x = -3$, NUS2 bei $x = 1$
 $x_s = (-3 + 1)/2 = -2/2 = -1$
 iii) $f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4 \Rightarrow S(-1/-4)$



12.2: Möglichkeit 2: Scheitel = HOP

- i) Bestimmung der ersten Ableitung der Funktion
 ii) Ableitung gleich 0 setzen: da der Scheitel ein Extrempunkt der Funktion ist, ist er eine Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$
(Hier muss man anders als bei Extrempunkten nicht untersuchen, ob f' einen Vorzeichenwechsel hat, denn man weiß ja, dass eine Parabel einen Extrempunkt hat).
 iii) Bestimmung des Funktionswertes des Scheitels

Im obigen Beispiel $f(x) = x^2 + 2x - 3$;

- i) $f'(x) = 2x + 2$
 ii) $2x + 2 = 0$
 $x = -1$
 ii) $f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -4 \Rightarrow S(-1/-4)$

GRUNDAUFGABE 13**Ortslinie bzw. Ortskurve bei einer Schar**

1. Die Koordinaten der Punkte aufschreiben: $x =$ $y =$
2. Die erste Gleichung nach dem Parameter auflösen und in die 2. einsetzen.

Beispiel: Ortslinie der Scheitel der Parabelschar: $y = ax^2 - 2x + 1$

Zunächst Scheitel allgemein: $0 = ax^2 - 2x + 1$

$$x_{1,2} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4a}}{2a}$$

$$S\left(\frac{1}{a}, \frac{(a-1)}{a}\right)$$

Ortslinie:

$$x = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{(a-1)}{a}$$

$$y = \frac{\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{1-x}{x} * x = 1 - x = \underline{\underline{-x + 1}}$$

GRUNDAUFGABE 14**Nullstellen eines Polynoms**

- a) x^n ausklammern
 b) Nullstellen erraten, bzw. es sind welche bekannt: Polynomdivision
 c) Nur bei biquadratischen Gleichungen $ax^4 + bx^2 + c = 0$:
 Substitution

a) **Die höchstmögliche Potenz von x (x^n) ausklammern**

$$f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 - x - 2)$$

d.h.: doppelte NuS bei $x = 0$

weiter: $x^2 - x - 2 = 0$

z.B. mit Vieta: $(x - 2)(x + 1) = 0$

d.h.: NuS bei $x = 2$, $x = -1$ und $x=0$

b) **Polynomdivision**

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$$

Eine NuS erraten oder gegeben : $x = 3$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 5x + 15) : (x - 3) = x^2 - 5 \\ -(x^3 - 3x^2) \\ \hline 0 - 5x + 15 \\ -(-5x + 15) \\ \hline 0 \end{array}$$

Daraus folgt: $x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = (x^2 - 5)(x - 3) = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - 3)$

d.h: NuS bei $x = -(\sqrt{5})$

$$x = +(\sqrt{5})$$

$$x = +3$$

c) **Substitution bei biquadratischen Gleichungen**

(Geht nur, wenn x^4 und x^2 einzige Potenzen von x sind)

Beispiel: $f(x) = x^4 - 18x^2 + 32 = 0$

Substitution.: $x^2 = z$

$$z^2 - 18z + 32 = 0$$

mit Lösungsformel oder Vieta:

$$z_1 = 16 \text{ und } z_2 = 2$$

Resubst.: $z = x^2$:

$$z = 2$$

$$x_1 = +\sqrt{2}; x_2 = -\sqrt{2};$$

$$z = 16$$

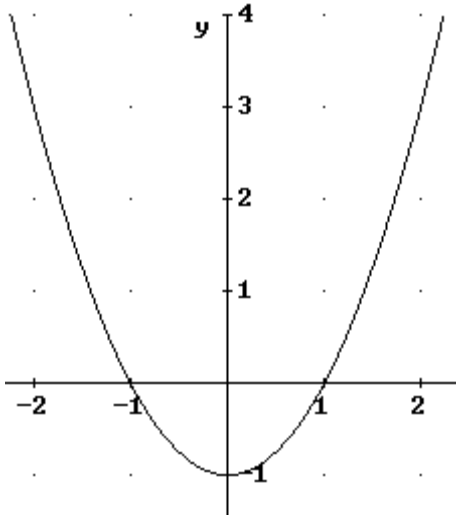
$$x_3 = +4; x_4 = -4$$

GRUNDAUFGABE 15A

Symmetrie des Graphen zum Koordinatensystem

Nur bei Polynomen als Funktionsterm:

Eine ganzrationale Funktion $f: x \rightarrow f(x)$ mit $x \in D_f$ hat einen Graphen



achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn **ausschließlich gerade Potenzen** von "x" auftreten; dabei sind Konstante erlaubt ($2 = 2x^0$).

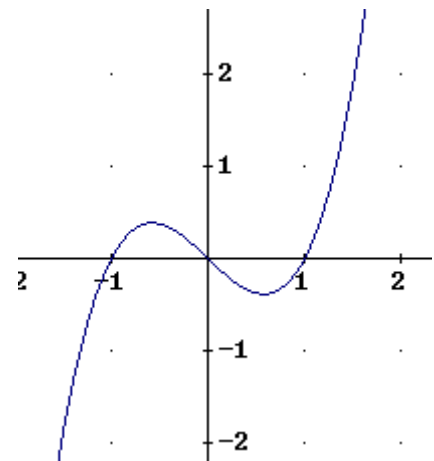
Die Funktion heißt dann gerade.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 1$

Eine ganzrationale Funktion $f: x \rightarrow f(x)$ mit $x \in D_f$ hat einen Graphen **punktsymmetrisch zum Ursprung (0;0)**, wenn **ausschließlich ungerade Potenzen** von "x" vorkommen; dabei sind Konstante verboten.

Die Funktion heißt dann ungerade.

Beispiel: $f(x) = x^3 - x$



Allgemeiner Fall:

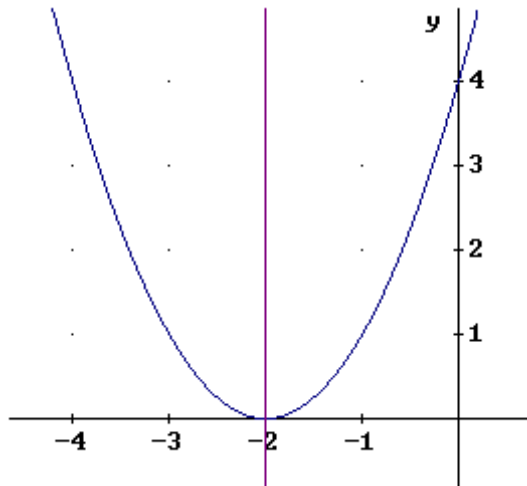
Allgemein: Berechne $f(-x)$.

Wenn dann
$$\begin{cases} f(-x) = f(x) \rightarrow \text{Graph achsensymmetrisch zur x-Achse} \\ f(-x) = -f(x) \rightarrow \text{Graph punktsymmetrisch zum Ursprung} \end{cases}$$

Das muss man z.B. bei den rationalen Funktionen, um ihre Symmetrie zum Koordinatensystem herauszubekommen, diese allgemeinen Regeln anwenden. Die sog. Exponentenregeln (der Polynomfunktionen) gelten hier nicht.

$$\text{Beispiel: } \frac{x^3 - x}{x} \quad f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{-x} = \frac{-x^3 + x}{-x} = \frac{-(x^3 - x)}{-x} = \frac{x^3 - x}{x} = f(x)$$

\Rightarrow Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

GRUNDAUFGABE 15B**Symmetrie zu anderen Achsen oder Punkten****Beispiel 1:** $f(x) = (x + 2)^2$; Achsensymmetrie**Methode 1**

(gutes Bild Analysisbuch 11. Klasse: Keil u.a. Infinitesimalrechnung 1, S. 44)

Dieser Funktionsgraph ist, wie wir aus der Zeichnung entnehmen können, symmetrisch zur Gerade $x = -2$. $f(-2 + h)$ und $f(-2 - h)$ haben die gleichen Funktionswerte.Demnach gilt bei der Achsensymmetrie zu einer Geraden x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0 - h)$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } f(-2 + h) &= (-2 + h + 2)^2 = h^2 \\ f(-2 - h) &= (-2 - h + 2)^2 = h^2 \end{aligned}$$

Methode 2: Verschieben des Graphen 2 nach rechts ergibt die Funktion g .Um g zu erhalten: Einsetzen von $x - 2$ in $f(x)$

$$g(x) = f(x - 2) = (x - 2 + 2)^2 = x^2$$

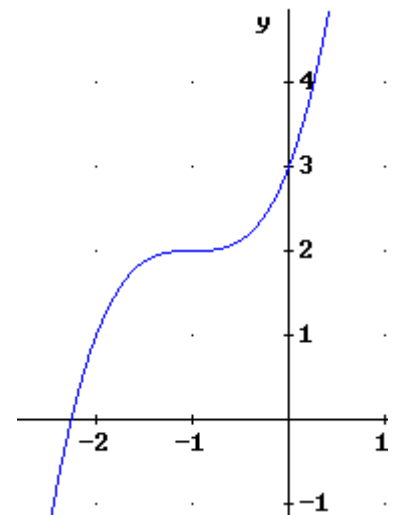
 $\Rightarrow G_g$ achsensymmetrisch zur y -Achse $\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur Gerade $x = -2$ **Beispiel 2:** $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$; $P(-1; 2)$; Punktsymmetrie**Methode 1:** (Bild wie oben)

y_0 muss der Mittelwert zwischen $f(x_0 + h)$ und $f(x_0 - h)$ sein. Diese Überlegung stützt sich darauf, dass P_0 bei gegebener Punktsymmetrie der Mittelpunkt der Strecke $[P'P]$ ist. Demnach gilt bei der Punktsymmetrie zu einem Punkt $P_0(x_0; y_0)$:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2y_0$$

Also:

$$\begin{aligned} f(-1 + h) + f(-1 - h) &= \\ &= (-1+h)^3 + 3(-1+h)^2 + 3(-1+h) + 3 + (-1-h)^3 + 3(-1-h)^2 + 3(-1-h) + 3 \\ &= -1 + 3h - 3h^2 + h^3 + 3 - 6h + 3h^2 - 3 + 3h + 3 + (-1) - 3h - 3h^2 - h^3 + 3 + 6h + 3h^2 - 3 - 3h \\ &\quad + 3 \\ &= 4 = 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

 $\Rightarrow f(x)$ ist punktsymmetrisch zu $P_0(-1; 2)$ 

Method 2:

Wir schieben den Graphen um 1 nach rechts, und um 2 nach unten, damit das mutmaßliche Symmetriezentrum im Ursprung liegt.

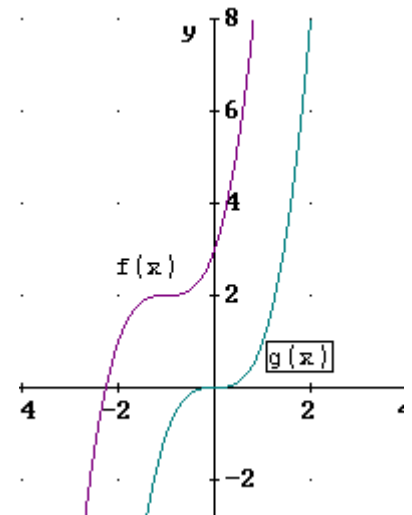
Ist $f(x)$ punktsymmetrisch zu P_0 , dürfte die neuentstandene Funktion $g(x)$ nur ungerade Exponenten aufweisen:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) - 2 \\ &= (x-1)^3 + 3(x-1)^2 + 3(x-1) + 3 - 2 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 6x + 3 + 3x - 3 + 3 - 2 \\ &= x^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow G_g$ punktsymmetrisch zum Ursprung

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zu $P_0(2; 0)$

Wenn der Graph von $f(x)$ punktsymmetrisch zu $(-1/2)$, dann muss die neue Funktion $g(x) = f(x-1) - 2$ punktsymmetrisch zu $(0/0)$ sein.

**Anwendung auf Scharen (Abi LK 1992 I 1e)**

$$f_k(x) = x^3 + k$$

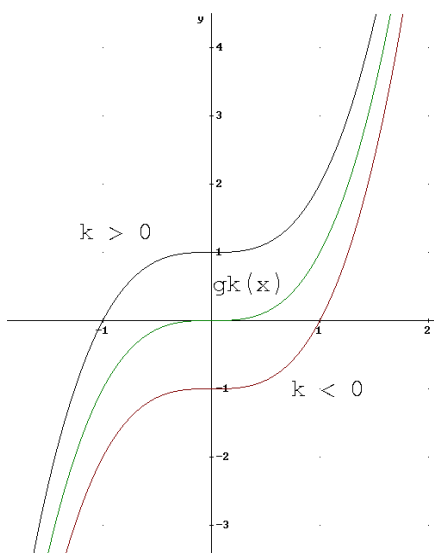
Vermuteter Symmetriepunkt $(0/k)$: also Verschiebung entlang der y-Achse:

Neue Funktion

für $k > 0$

$$g_k(x) = f_k(x) - k = x^3 + k - k = x^3$$

Der neue Graph ist punktsymmetrisch zu $(0/0)$, also ist der alte Graph punktsymmetrisch zu $(0/k)$.



für $k < 0$

$$g_k(x) = f_k(x) - k$$

Also gleicher Ansatz!

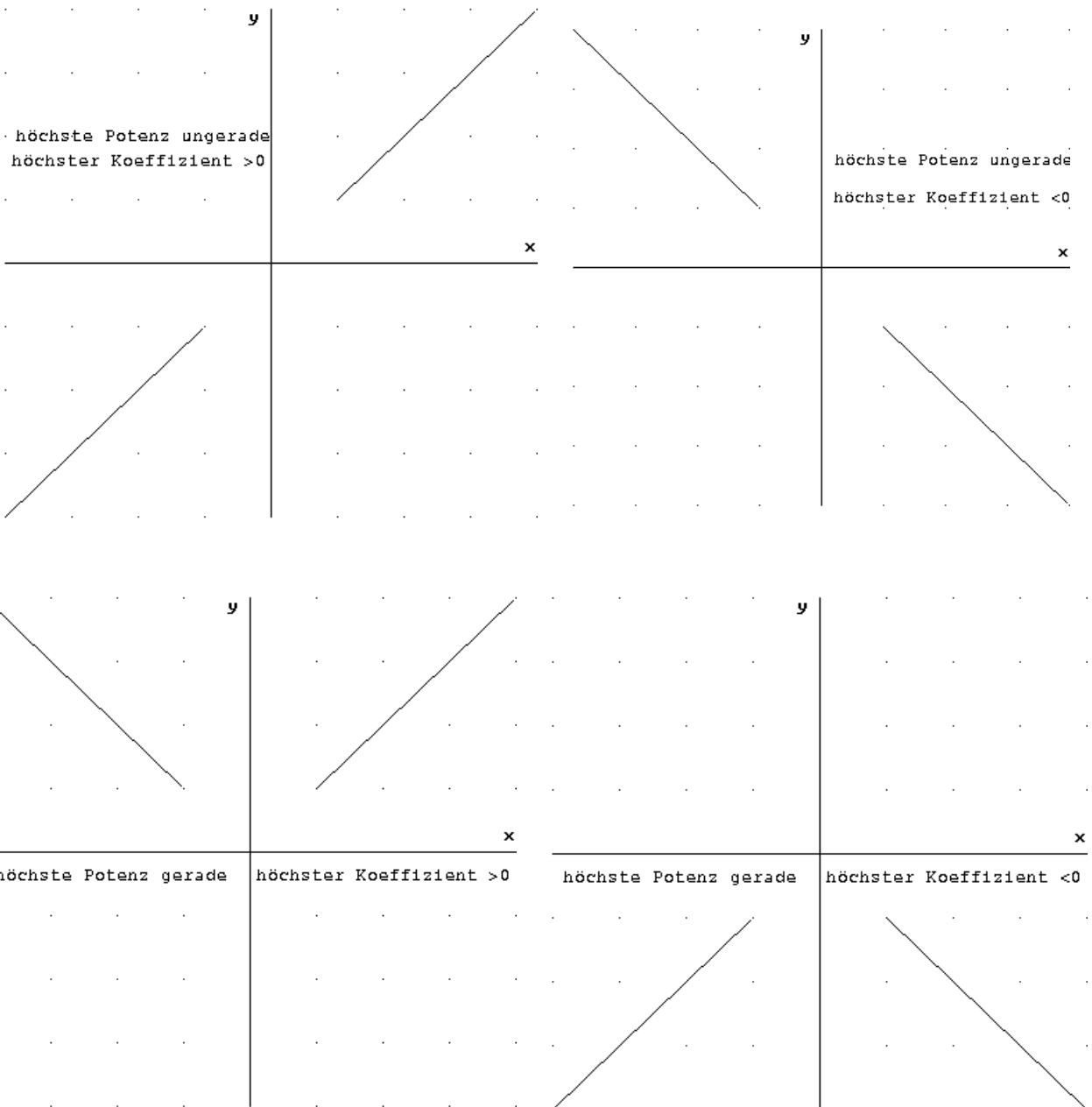
Ich muss zwar jetzt nach oben schieben, d.h. den Funktionsterm vergrößern.

$k < 0$ also $-k > 0$!

GRUNDAUFGABE 16

Verhalten von rationalen Funktionen im Unendlichen

16.1 Polynomfunktionen



Diese Erkenntnisse über den Verlauf des Graphen erhält man auch durch Ausklammern der höchsten Potenz von x :

$$\text{Beispiel: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 1000x^2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{1000}{x} \right) \approx x^3, \text{ weil durch das}$$

ungewöhnliche Ausklammern (in der Mittelstufe durfte man immer nur die niedrigste x -Potenz ausklammern) ein Bruch mit x im Nenner entsteht, der für $x \rightarrow \infty$ gegen Null geht: wir können ihn also vernachlässigen.

Nun müssen wir nur noch überlegen, wie der Bruch der einfachen Potenzfunktion $y=x^3$ aussieht, und schon wissen wir, was unsere Funktion im Unendlichen macht.

16.2 Gebrochenrationale Funktionen

Grad Z < Grad N: waagrechte Asymptoten: höchste Potenz von x ausklammern

Grad Z > Grad N: Polynomdivision

Grad Z = Grad N:

Die Asymptote ist eine parallele Gerade zur x-Achse.

Berechnung der Asymptote:

z.B. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1}$

(ii) höchste Potenz von x ausklammern und kürzen:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cancel{x}(1+\frac{1}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1+\frac{1}{x})}{(1-\frac{1}{x})} = \frac{1}{1} = 1$$

→ Die waagrechte Asymptote heißt: $y=1$

Grad Z < Grad N:

Die Asymptote ist immer die x-Achse

Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = \frac{0}{1} = 0$$

(Rechenschritte siehe oben)

Grad Z > Grad N:

Die Asymptote ist eine schräge Gerade ($y=mx+t$), eine Parabel oder eine Kurve höherer Ordnung

Berechnung der Asymptote durch Polynomdivision

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

$$f(x) = (x^2+1) : (x-1) = x+1 + \frac{2}{x-1}$$

Geradengleichung
der Asymptote

Rest (wird für $x \rightarrow \pm\infty$
immer kleiner)

GRUNDAUFGABE 17

Verlauf des Graphen ober- / unterhalb der Asymptote

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Polynomdivision

$$x^2 : (x-1) = x + 1 + \frac{1}{x-1} \quad \leftarrow \text{Restglied}$$

$$\frac{-(x^2-x)}{-(x-1)}$$

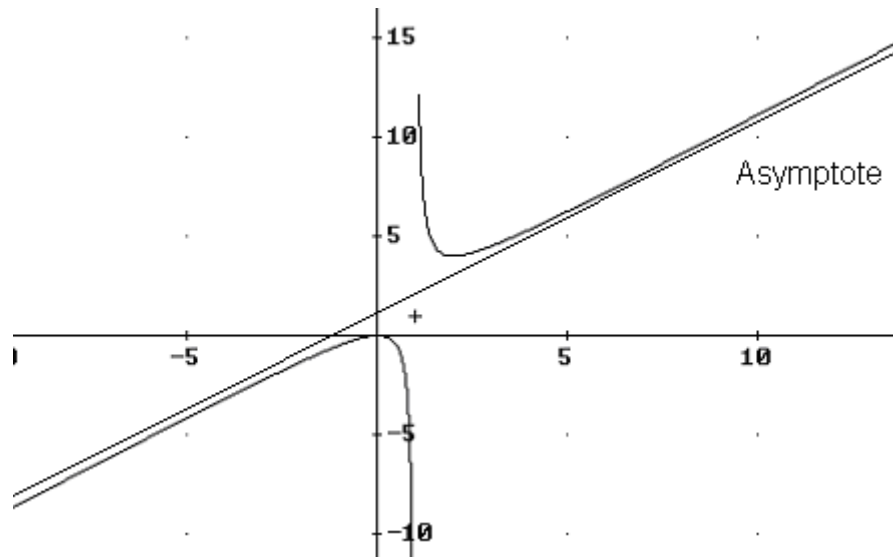
$$\frac{-x+1}{-x+1}$$

$$\frac{-x+1}{1}$$

Asymptote

- -wenn $x > 1$, dann ist der Rest positiv \Rightarrow der Graph verläuft oberhalb der Asymptote
- -wenn $x < 1$, dann ist der Rest negativ \Rightarrow der Graph verläuft unterhalb der Asymptote

Skizze der Funktion:



Allgemein

1) Man betrachtet das Restglied der zur Bestimmung der schiefen Asymptote durchgeführten Polynomdivision

2) Bestimmung, welche Bedingungen "x" und gegebenenfalls der Scharparameter erfüllen müssen, damit das gesamte Restglied positiv bzw. negativ wird

- wird der Rest addiert, verläuft der Graph oberhalb der Asymptote
- wird der Rest subtrahiert, verläuft der Graph unterhalb der Asymptote; folglich sind die Werte der Asymptote größer als die des Graphen

GRUNDAUFGABE 18**Tangentengleichungen**

Um die Gleichung einer Tangente in einem bestimmten Punkt zu ermitteln, gibt es zwei Möglichkeiten:

Möglichkeit 1

Beispiel: $f(x)=x^2+2x$ im Punkt $P(-2/0)$

allgemeine Form: $y=mx+t$

Die Funktion $f'(x)$ ableiten: $f'(x)=2x+2$

Den x-Wert von $P(-2)$ in die Ableitung einsetzen: $f'(-2)=2(-2)+2= -2$

→ $f'(x)= -2= m$ (Steigung der Tangente an der Stelle $x= -2$) $m = -2$

→ $y= -2x+t$

$P(-2/0)$ in Gleichung einsetzen:

→ $0= -2(-2)+t \rightarrow t= -4$

→ $y=-2x-4$

- Die erste Möglichkeit besteht also darin, zuerst den x-Wert des gegebenen Punktes P in die erste Ableitung der Funktion einzusetzen, um die Steigung der Tangente $f'(x)= m$ zu erhalten.
- Nun setzt man m sowie den Punkt (x/y) in die allgemeine Form $y= mx+t$ ein, um t und somit auch die Gleichung zu erhalten.

Möglichkeit 2: Formelsammlung S. 58

Die andere Möglichkeit ist die sog. Gleichung der Tangente:

$$y= f'(x_0)(x- x_0)+f(x_0)$$

Die Funktion ableiten: $f'(x)=2x+2$

x_0 ist der x-Wert von P , also $x=-2$ in die Ableitung einsetzen:

→ $f'(-2) = -2 = f'(x_0)$

Den Rest einsetzen:: -> $y= -2[x-(-2)]+0$

→ $y= -2x-4$

GRUNDAUFGABE 19**Normalengleichung****Möglichkeit 1:**

Definition: die Normale ist ein Senkrechte auf die Tangente

Steigung der Normalen:

$$m_n \cdot m_t = -1 \quad (\text{vgl. Grundaufgabe 6})$$

$$m_n = -\frac{1}{m_t}$$

Beispiel:

Normale an $P(-1/2)$ an die Parabel $y = x^2 + 1$

Ermittlung der Steigung m der Tangente in $P(-1/2)$ durch $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2x \quad \leftarrow \text{allgemein: } x\text{-Wert des Berührungspunktes einsetzen}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$\Rightarrow m_t = -2$$

$$\Rightarrow m_n = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Einsetzen in Normalengleichung:

$$P(-1/2) \in \text{Normale}$$

$$y = \frac{1}{2}x + t$$

$$2 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + t$$

$$t = 2 \frac{1}{2}$$

Normalengleichung:

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \frac{1}{2}$$

Möglichkeit 2: Formelsammlung S. 59/3

Zur Rechenmethode, insbesondere was man einsetzt, vgl. Grundaufgabe 18

GRUNDAUFGABE 20

Tangente von einem Punkt außerhalb der Kurve an die Kurve (d.h. der Berührungspunkt ist nicht gegeben)

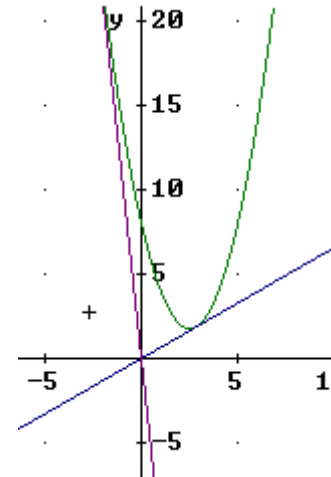
Anmerkung: Diese Aufgabe kann bei beliebigen Punkten zu einigermaßen hässlichen Gleichungen führen; aber selbst im Leistungskursabitur kommt nur der Fall vor, dass man eine Tangente vom Ursprung aus an den Graphen legen soll – und dann ist es einfach.

An einem Beispiel: Tangente von $P(0/0)$ aus an den Graphen von

$$f: x \rightarrow x^2 - 5x + 8$$

Tangente durch $P(0/0)$ bedeutet nicht, dass $(0/0)$ Berührungspunkt ist.

Wir suchen also eine Gerade $y = mx + t$, die durch den Ursprung geht und den Graphen in einem Punkt $B(b/ ?)$ berührt.



Methode 1:

- (i) Der Ursprung liegt auf der Tangente: $0 = m \cdot 0 + t \Rightarrow t = 0$.

Tangente: $y = mx$.

Weil als Punkt P außerhalb des Graphen also in der Abi-Realität nur der Ursprung vorgesehen ist, bekommt man hier immer gleich den t -Wert und der ist netterweise auch noch Null.

Diese Idee, zuallerst den Punkt außerhalb zu berücksichtigen, stammt von Christine Gumbmann, 11d des Schuljahres 2002/2003.

- (ii) Die Tangentensteigung m entspricht der Steigung der Funktion in diesem Punkt B .

Steigungsformel = Ableitung der Funktion: $f'(x) = 2x - 5$,
also $m = f'(b) = 2b - 5$.

Die Tangentengleichung lautet also: $y = (2b - 5) \cdot x$.

- (iii) Der Berührungspunkt B liegt auf der Tangente. Wir kennen ihn nicht, aber seine Koordinaten müssen die Gleichung der Funktion erfüllen, also $B(b/b^2 - 5b + 8)$.

Der Berührungspunkt liegt aber auch auf der Tangente, also erfüllen seine Koordinaten auch die Tangentengleichung: $b^2 - 5b + 8 = (2b - 5) \cdot b$.

Aus dieser Gleichung kann man nun b ermitteln: $b^2 - 2b^2 - 5b + 5b + 8 = 0$

$$-b^2 + 8 = 0$$

$$b = \pm 2\sqrt{2}$$

Somit lauten die Tangentengleichungen: $y = \pm 2\sqrt{2} x$.

Die Koordinaten des Berührungspunkts heißen: $B(\pm 2\sqrt{2} / f(\pm 2\sqrt{2}))$.

Ermittlung der 2. Koordinaten von B :

$$y = (\pm 2\sqrt{2})^2 - 5(\pm 2\sqrt{2}) + 8 = 16 \pm 10\sqrt{2}$$

$$\text{also } B(\pm 2\sqrt{2} / 16 \pm 10\sqrt{2})$$

Methode 2: Mit der Tangentenformel aus der Formelsammlung

(i.) Koordinaten und Steigungswert des Berührungspunkts allgemein ansetzen
 $B(b / b^2-5b+8), f'(b) = 2b-5.$

(ii.) Tangentenformel:
 $y = f'(b) (x-b) + f(b)$
 $y = (2b-5)(x-b) + b^2-5b+8$
 $y = (2b-5)x - (2b-5) \cdot b + b^2-5b+8$
 $y = (2b-5)x - b^2+8$

(iii.) $P(0/0) \in \text{Tangente}$
 $0 = (2b-5) \cdot 0 - b^2+8$
 $-b^2+8 = 0$ (wie auch mit der anderen Methode schon)
 $b = \pm 2\sqrt{2}$

Somit lauten die Tangentengleichungen: $y = \pm 2\sqrt{2} x.$

Die Koordinaten des Berührungspunkts heißen: $B(\pm 2\sqrt{2} / f(\pm 2\sqrt{2})).$

Ermittlung der 2. Koordinaten von B:

$$y = (\pm 2\sqrt{2})^2 - 5(\pm 2\sqrt{2}) + 8 = 16 \pm 10\sqrt{2}$$

$$\text{also } B(\pm 2\sqrt{2} / 16 \pm 10\sqrt{2})$$

GRUNDAUFGABE 21

Extrempunkte (EP) und Sattelpunkte (SAP)

Verdacht auf Extremwert:

- (i) Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen, nun hat man Punkte mit waagrechter Tangente, mehr nicht, wirklich nicht!

Begründung eines Extremwerts:

- (ii) Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn die erste Ableitung eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat; ein Extrempunkt liegt vor, wenn die erste Ableitung eine Nullstelle mit VZW hat.

Für den Nachweis eines Extrempunktes gibt es drei Möglichkeiten:

- Nachweis des VZW mit einer Skizze des Graphen von f'
- Bei stetigen Funktionen: Überlegungen mithilfe der Grenzwerte.
- f'' betrachten: $f''(x) > 0 \Rightarrow$ der Graph von f hat TIP, $f''(x) < 0 \Rightarrow$ der Graph von f hat HOP. **Aber Achtung!! Wenn $f''(x)=0$, dann kann G_f trotzdem einen Extrempunkt haben!!!**

Extrempunkte und Sattelpunkte liegen vor, wenn die *Steigung m* eines Funktionsgraphen *gleich Null* ist.

Bei *Extrempunkten* wechselt die *Steigung* vom *Positiven ins Negative (HOP)* bzw. vom *Negativen ins Positive (TIP)*.

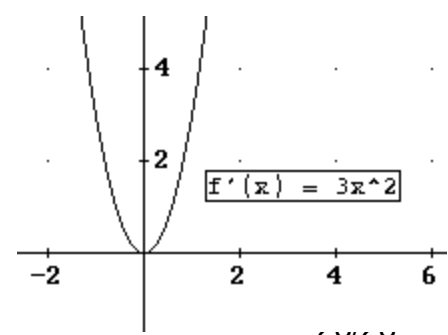
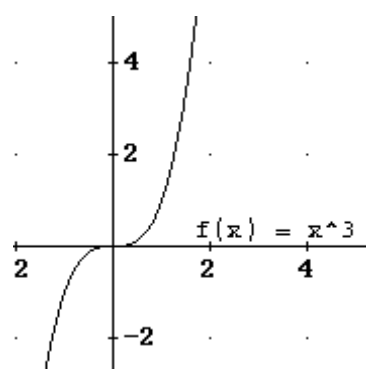
Ein *Sattelpunkt* liegt hingegen vor, wenn die *Steigung $m = 0$* erreicht wird, jedoch *kein Wechsel* zwischen *positiver und negativer Steigung* gegeben ist.

Beispiel 1: $f(x) = x^3$

(i.) $f'(x) = 3x^2$
 $0 = 3x^2$
 $x = 0$

- (ii.) Ein SAP liegt vor, wenn die 1. Ableitung keinen Vorzeichenwechsel hat. Die Ableitung *muss* also NuS mit gerader Potenz haben!!!

Graph hat SAP am Ursprung



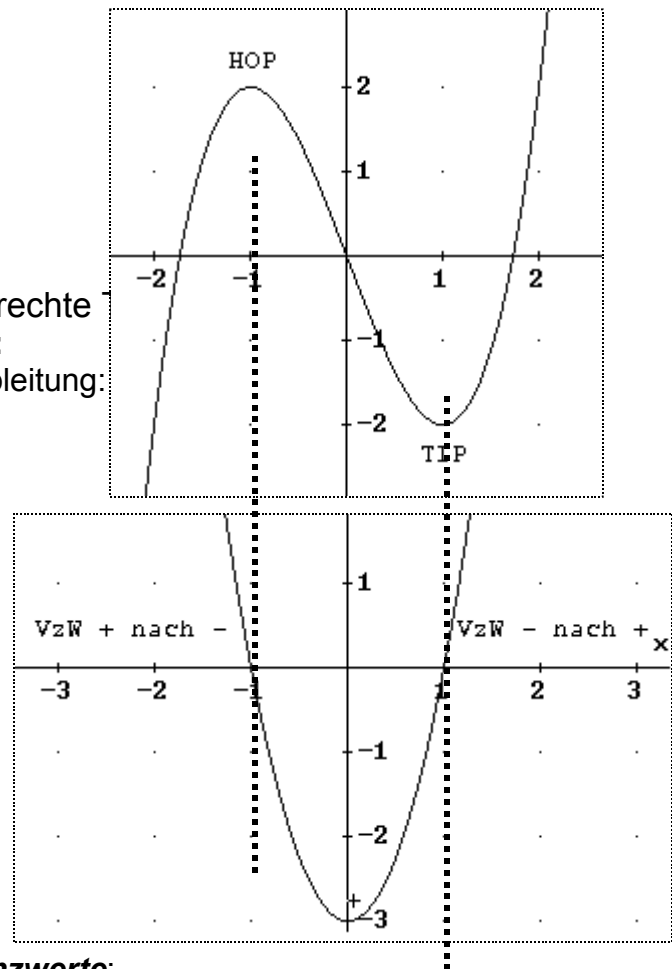
Beispiel 2: $f(x) = x^3 - 3x$

Methode a) Skizze des Graphen von f'

(i.) $f'(x) = 3x^2 - 3$
 $0 = 3x^2 - 3$
 $x = \pm 1$

\Rightarrow bei $x = +1$ und bei $x = -1$ waagrechte

- (ii.) **Nachweis eines Extrempunktes:**
 Skizze des Graphen der ersten Ableitung:
 Bei VzW $+$ \rightarrow - liegt HOP vor
 Bei VzW $-$ \rightarrow + liegt TIP vor



oder Methode b) Betrachtung der Grenzwerte:

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$ bilden; dadurch bestimmen ob bei $x \rightarrow \pm \infty$ Graph von oben oder unten kommt.

Durch logisches Denken bestimmen, wo es sich um einen HOP oder TIP handelt.

Wir wissen in unserem Beispiel: $P(0/0) \in G_f$
 $Q(1/-1) \in G_f$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$

Da f stetig, muss es einen TIP rechts von P geben.

$x = 1$ ist rechts von P einzige Nullstelle von $f' \Rightarrow$ bei $x = 1$ TIP

oder Methode c) 2. Ableitung betrachten: $6x$

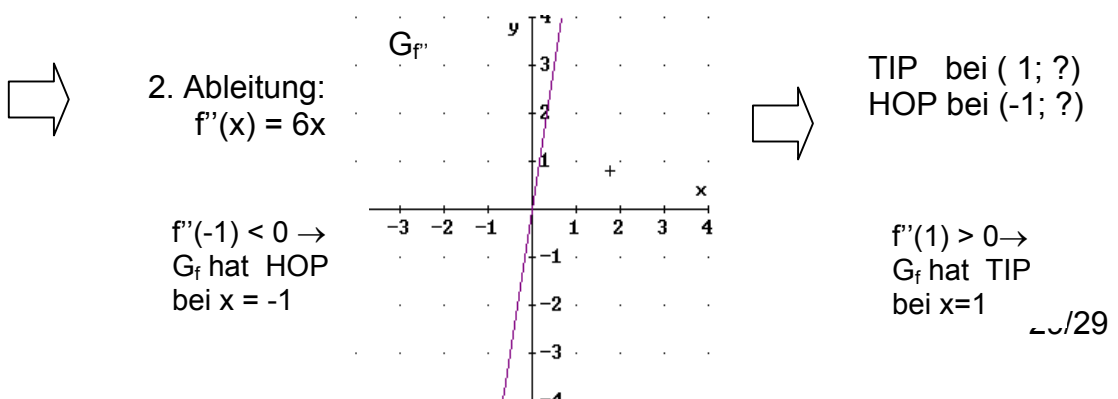
Wenn $f''(x) > 0$ ist der Graph f linksgekrümmt $\rightarrow f$ hat TIP

Wenn $f''(x) < 0$ ist der Graph f rechtsgekrümmt $\rightarrow f$ hat HOP

$f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0$ G_f linksgekrümmt $\Rightarrow f$ hat ein rel. Minimum bei $x = 1$

$f''(-1) = -6 < 0$ G_f rechtsgekrümmt $\Rightarrow f$ hat ein rel. Maximum bei $x = -1$



Die Fragestellung heißt häufig:

„Bestimme Art und Lage der Extrempunkte“

Art \Rightarrow HOP/TIP wie oben begründen a),b) oder c)

Lage \Rightarrow y- Koordinate durch einsetzen in Funktionsgleichung $f(x)$ bestimmen,
z.B. TIP (1/-1)

Wichtiger Kommentar zu Methode c):

Ich möchte hier sehr nachdrücklich davor warnen, den Nachweis von Extrempunkten nur mechanisch durchzuführen, d.h. $f'(x)=0$ zu setzen und die gefundenen Werte in die zweite Ableitung einzusetzen, ohne sich über den Verlauf von f' Gedanken zu machen.

Dabei kann nämlich folgendes passieren:

es kann $f''(x)=0$ sein und trotzdem ein Extrempunkt von G_f vorliegen.

Beispiel:

$$f(x)=x^4$$

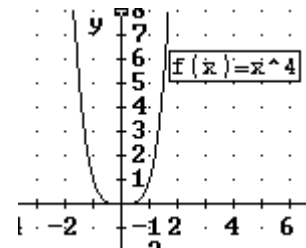
$$f'(x)=4x^3$$

$$f''(x)=12x^2$$

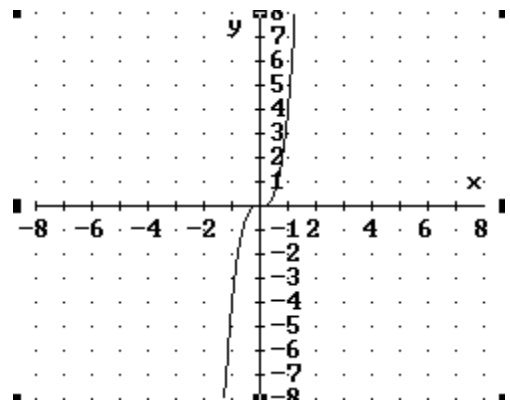
Nullstellen von f' : $x=0$.

$x=0$ in f'' einsetzen: $f''(0)=0$

Und daraus schließt man jetzt fälschlicherweise, dass kein Extrempunkt von G_f vorliegt, obwohl der Graph etwas anderes verrät ...



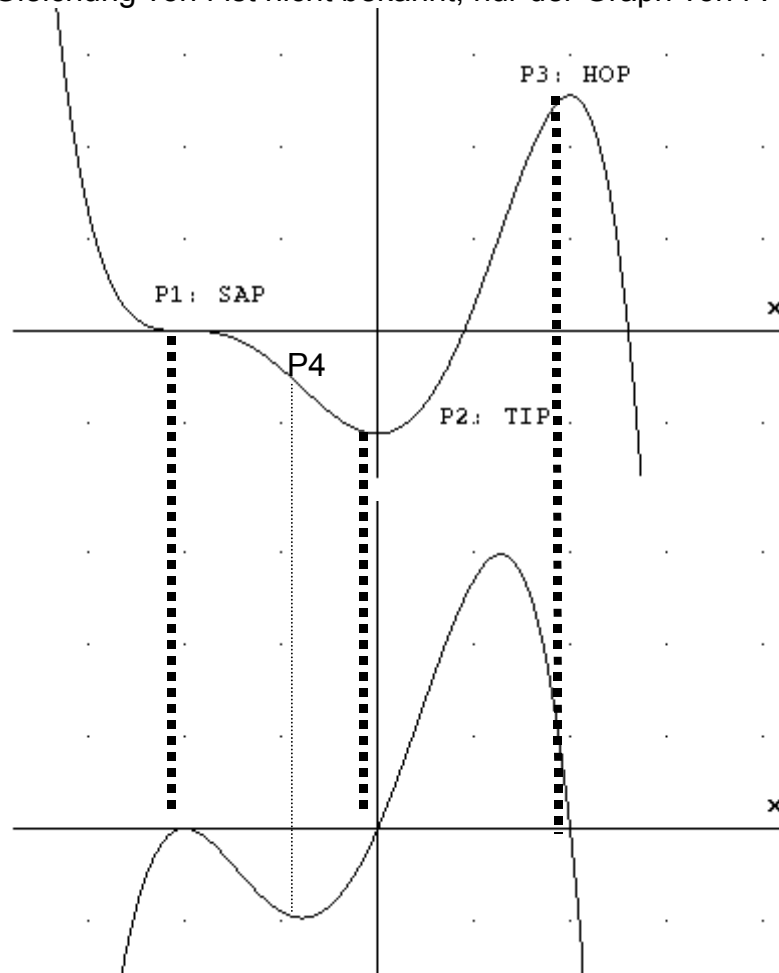
Hätte man den Verlauf von G_f' angesehen, dann hätte man den Vorzeichenwechsel bei $x=0$ von $-$ nach $+$ bemerkt, der den TIP von G_f beweist.



GRUNDAUFGABE 22A

Graph von f bekannt – skizziere den Graphen von f'

Die Gleichung von f ist nicht bekannt, nur der Graph von f :



Skizze von G_f :

P1: G_f hat Terrassenpunkt $\Rightarrow f'$ hat doppelte Nullstelle, da in P1 Steigung = 0, jedoch vorher und nachher negativ

P2: G_f hat Tiefpunkt $\Rightarrow G_f$: Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, da in P2 Steigung = 0, vorher fällt jedoch G_f und nachher steigt G_f .

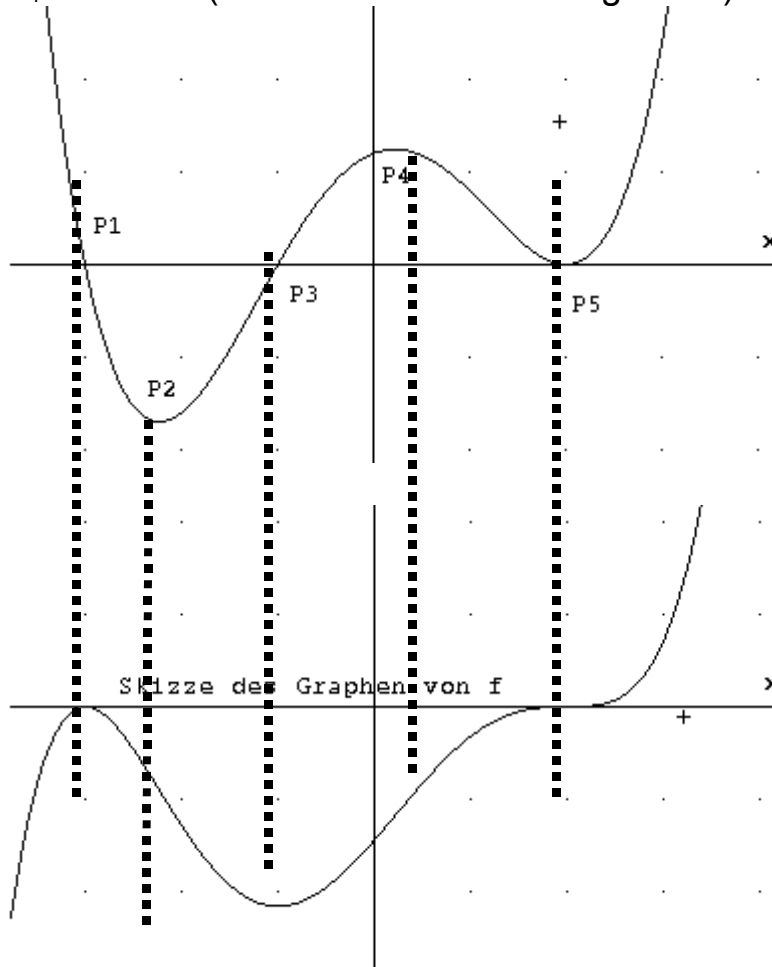
P3: G_f hat Hochpunkt $\Rightarrow G_f$: Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, da in P3 Steigung $f' = 0$, vorher steigt jedoch G_f und nachher fällt G_f

P4: G_f hat einen Wendepunkt $\Rightarrow f''$ hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel $\Rightarrow G_f$ hat einen Extrempunkt, weil ja f' die Ableitung von f ist.

GRUNDAUFGABE 22B

Graph von f' bekannt, skizziere den Graphen von f

$G_{f'}$ bekannt (aber nicht die Gleichung von f'):



- P1: Das Vorzeichen von $G_{f'}$ wechselt von $+$ nach $- \Rightarrow G_f$ steigt streng monoton bis zum x -Wert von P1 und fällt anschließend streng monoton $\Rightarrow G_f$ hat für den x -Wert von P1 Hochpunkt
- P2: $G_{f'}$ fällt bis P2 und steigt anschließend, daher $\text{Steigung}_{f'} = 0$ in P2 \Rightarrow Extrempunkt von $f' \leftrightarrow$ Wendepunkt von G_f
- P3: Das Vorzeichen von $G_{f'}$ wechselt von $-$ nach $+$ $\Rightarrow G_f$ fällt bis zum x -Wert von P3 und steigt anschließend $\Rightarrow G_f$ hat für den x -Wert von P3 Tiefpunkt
- P4: $G_{f'}$ steigt bis P4 und fällt anschließend, daher $\text{Steigung}_{f'} = 0$ in P4 $\Rightarrow G_f$ hat Wendepunkt,
- P5: $G_{f'}$ hat doppelte Nullstelle \leftrightarrow kein Vorzeichenwechsel $\Rightarrow G_f$ hat Terrassenpunkt

GRUNDAUFGABE 23

Wendepunkte

Verdacht auf Wendepunkt:

(i) $f''(x) = 0 \Rightarrow$ Der Graph hat keine Krümmung an dieser Stelle.

Begründung für einen Wendepunkt:

(ii) f'' hat einen Vorzeichenwechsel: Dazu betrachtet man eine Skizze des Graphen von f'' .

(Für Unbeirrbar: Wenn man einen Wendepunkt nachweisen will, kann man stattdessen auch zeigen, dass die dritte Ableitung Null ist).

(iii) f'' hat keinen Vorzeichenwechsel \Rightarrow
der Graph von f hat einen Flachpunkt

(hier gibt es die Varianten: Flachpunkt und zugleich Extrempunkt, oder Flachpunkt bei steigendem bzw. fallendem Graphen, in beiden Fällen ähnelt der Graph eine kurze Strecke lang einer Gerade, die ja auch keine Krümmung hat).

Als Wendepunkt WP bezeichnet man den Übergang von Rechtskrümmung auf Linkskrümmung (bzw. umgekehrt). An dieser Stelle hat der Graph der Funktion keine Krümmung.

i) Bestimmung der Nullstellen der zweiten Ableitung der Funktion

ii) Bestimmung der Art der Nullstelle:

NuS von f'' ohne VZW $\rightarrow G_f$ hat hier einen Flachpunkt

NuS von f'' mit VZW $\rightarrow G_f$ hat hier einen Wendepunkt

- bei VZW $+\rightarrow -$: Übergang von Links- auf Rechtskrümmung

- bei VZW $-\rightarrow +$: Übergang von Rechts- auf Linkskrümmung

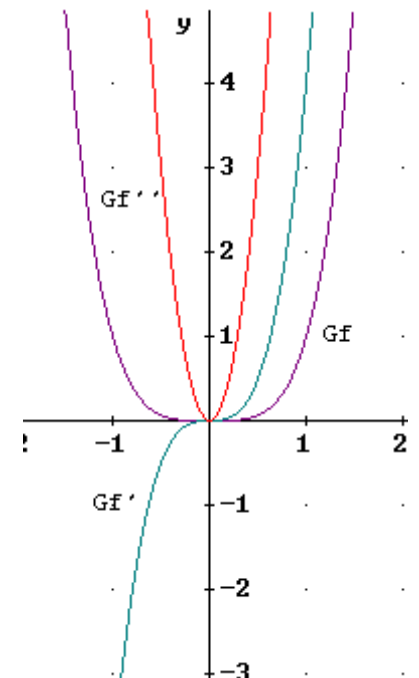
Beispiel 1: $f(x) = x^4$
 $f'(x) = 4x^3$
 $f''(x) = 12x^2$

$\rightarrow f''$ hat bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle,
d.h. eine Nullstelle **ohne** Vorzeichenwechsel

$\rightarrow G_f$ hat bei $x = 0$ einen **Flachpunkt**
keinen Wendepunkt

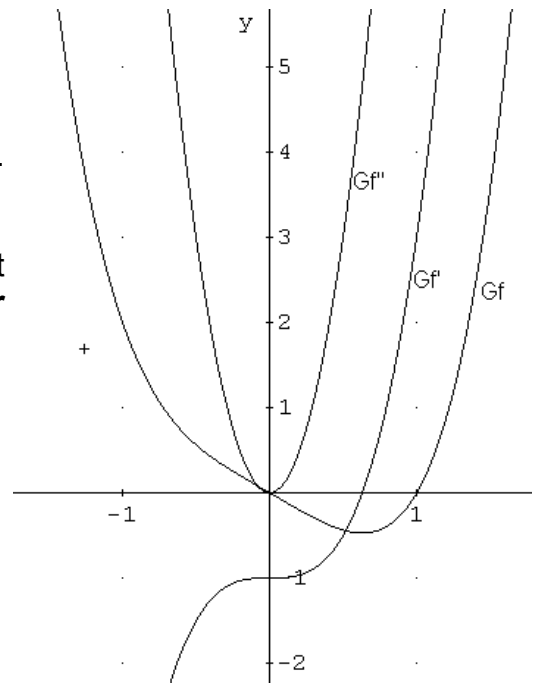
f' hat NuS mit Vorzeichenwechsel \Rightarrow

$G_{f'}$ hat Flachpunkt mit waagrechter Tangente, also
Flachpunkt und zugleich Extrempunkt



Beispiel 2: $f(x) = x^4 - x$
 $f'(x) = 4x^3 - 1$
 $f''(x) = 12x^2$

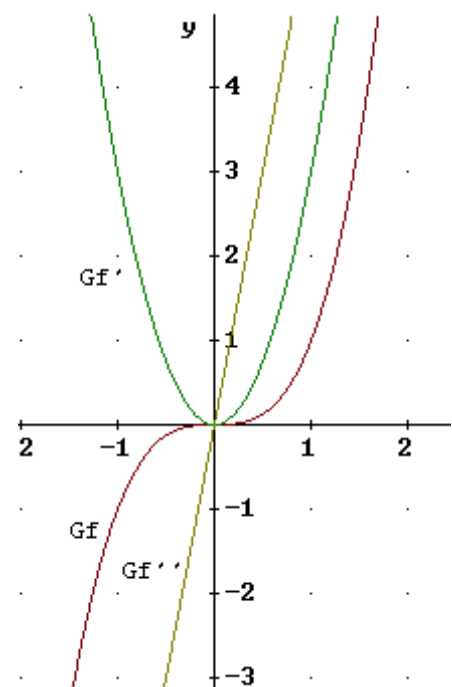
→ f'' hat bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle, d.h. eine Nullstelle **ohne** Vorzeichenwechsel – G_f hat Flachpunkt.
 f' aber hat bei $x = 0$ keine Nullstelle → G_f hat bei $x = 0$ einen **Flachpunkt mit schräger Tangente**



Beispiel 3: $f(x) = x^3$
 $f'(x) = 3x^2$
 $f''(x) = 6x$

→ f'' hat bei $x = 0$ eine einfache Nullstelle, d.h. eine Nullstelle **mit** Vorzeichenwechsel
 → G_f hat bei $x = 0$ einen **Wendepunkt**

hier: VZW - → + → Übergang von Rechts- auf Linkskrümmung



GRUNDAUFGABE 24

Funktionsgraphen skizzieren, wenn man keine Nullstelle kennt.

- (i) Man bildet eine neue Funktion, indem man die Konstante abzieht.
- (ii) Von dieser neuen Funktion bekommt man durch Ausklammern von x mindestens eine Nullstelle heraus und kann den Graphen wahrscheinlich skizzieren.
- (iii) Nun verschiebt man um die Konstante nach oben oder unten und bekommt zumindest eine Idee vom gewünschten Graphen.

Von Funktionen von drittem Grad oder mehr, die zusätzlich noch eine Konstante aufweisen, können wir die Nullstellen meist nicht bestimmen. Deshalb bedienen wir uns eines Auswegs. Indem wir einfach die störende Konstante abziehen bekommen wir eine neue Funktion, von der wir durch Ausklammern von x zumindest eine Nullstelle erhalten, und somit den Graphen in den meisten Fällen skizzieren können. Im Koordinatenkreuz verschiebt man nun den Graphen der Hilfsfunktion um die Konstante in y -Richtung und bekommt immerhin eine Idee, wie der Graph in etwa verläuft.

Beispiel:

z.B.: $f(x) = 4x^3 + 8x^2 - 7x + 2$

(Wegen der Konstante ist es nicht möglich x auszuklammern)

$$g(x) = f(x) - 2 = 4x^3 + 8x^2 - 7x$$

(Konstante $k = 2$ abziehen und man erhält eine neue Funktion $g(x)$)

$$g(x) = 0$$

$$\rightarrow 0 = 4x^3 + 8x^2 - 7x$$

$$\rightarrow 0 = x(4x^2 + 8x - 7)$$

$$\rightarrow x_1 = 0$$

$$\rightarrow 0 = 4x^2 + 8x - 7$$

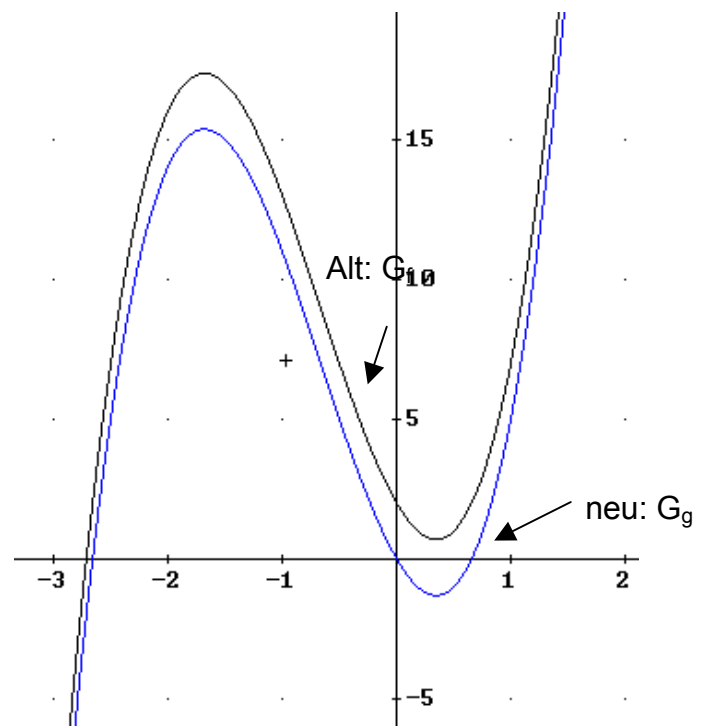
$$\rightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\rightarrow x_{1/2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 112}}{8}$$

$$\rightarrow x_{1/2} = -1 \pm 1,66$$

$$\rightarrow x_1 = 0,66; \quad x_2 = -2,66$$

Durch Verschiebung des Graphen von g um $+2$ in y -Richtung erhält man den Graphen von f .



GRUNDAUFGABE 25

Monotonieverhalten bei gebrochen-rationalen Funktionen.

Man untersucht nur den Zähler von f' , weil der Nenner stets > 0 ist. Der Zähler ist der **Vorzeichenbestimmende Anteil**.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2} \quad \text{ID}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$f'(x) = \frac{-4(x^2-1)}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} \quad \text{nicht kürzen!}$$

↑
Quotientenregel

Wir sehen, dass $f'(x) = 0$ wenn der Zähler = 0, also $x = -1$ oder $x = 1$.

Aber $x = -1 \notin \text{ID}_f$

⇒ Nur $x = 1$ untersuchen!

Wie können wir aber einen Vorzeichenwechsel bei $x = 1$ nachweisen?

Idee:

Wegen der Quotientenregel beim Ableiten ist der Nenner immer ein Quadrat. (Deswegen f' nicht kürzen, damit das so bleibt! Also im Beispiel nicht mit $(x+1)$ kürzen).

⇒ Der Nenner ist stets positiv

⇒ Das Vorzeichen dieses Bruches f' hängt nur vom Zähler ab.

Der Nenner ist also der vorzeichenbestimmende Anteil von f' (VzbA) und nur ihn skizzieren wir.

VzbA von f' hat VzW + ▷ - bei $x = +1$

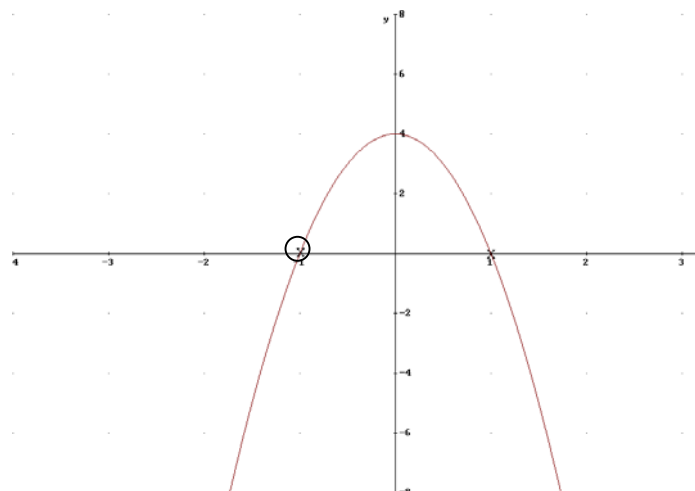
⇒ f' hat VzW + ▷ - bei $x = +1$

⇒ f nimmt bei $x = +1$ sein Maximum an

$$\Rightarrow \text{HOP} \left(1 / \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1 \right) = 1/1$$

1 in $f(x)$ einsetzen

$G_{\text{VzbA } f'}$



GRUNDAUFGABE 26**Stetigkeit bei abschnittsweise definierten Funktionen.****Beispiel 1:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2, & \text{wenn } x \leq 2 \\ x^2, & \text{wenn } x > 2 \end{cases}$$

$$\text{NR: } x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

rechtsseitiger = linksseitiger Grenzwert

$$f \text{ stetig, wenn } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

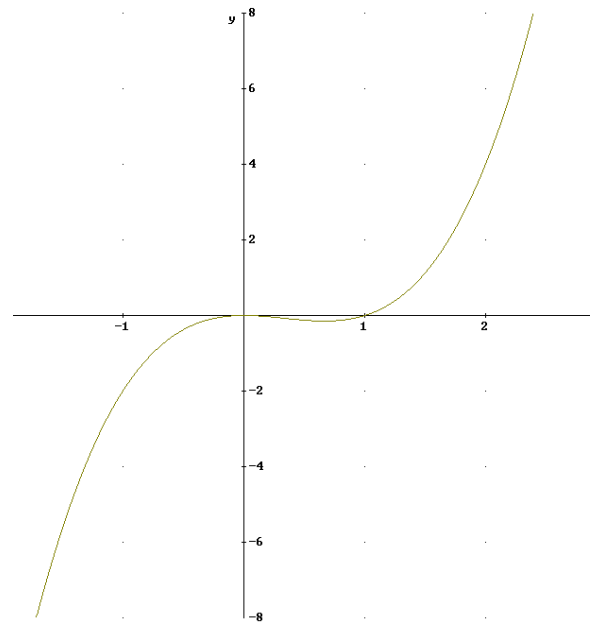
$$\text{linksseitiger Grenzwert:} \\ \lim_{x < 2} f(x) = \lim_{x < 2} (x^3 - x^2) = 2^3 - 2^2 = 4$$

$$x \rightarrow 2^- \quad x \rightarrow 2^- \\ x < 2 \quad x < 2$$

$$\text{rechtsseitiger Grenzwert:} \\ \lim_{x > 2} f(x) = \lim_{x > 2} (x^2) = 2^2 = 4$$

$$x \rightarrow 2^+ \quad x \rightarrow 2^+ \\ x > 2 \quad x > 2$$

⇒ Beide Grenzwerte gleich ⇒ f bei x= 2 stetig. Der Graph hat keinen Sprung.

**Beispiel 2:**

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1 \\ 1-x, & x > -1 \end{cases}$$

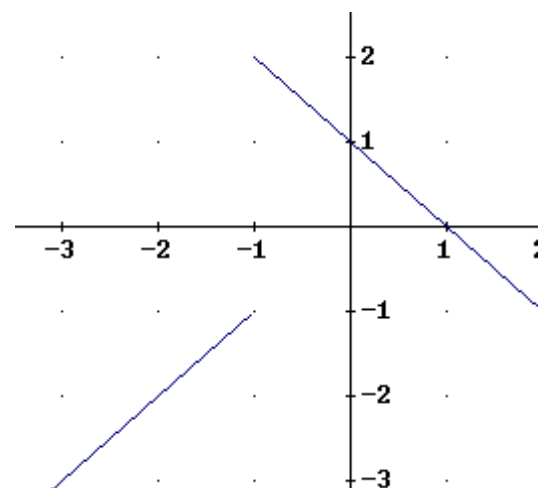
linksseitiger Grenzwert

$$\lim_{x < -1} f(x) = \lim_{x < -1} (x) = -1 \\ x \rightarrow -1^- \quad x \rightarrow -1^- \\ x < -1 \quad x < -1$$

rechtsseitiger Grenzwert

$$\lim_{x > -1} f(x) = \lim_{x > -1} (1-x) = 1 - (-1) = 2 \\ x \rightarrow -1^+ \quad x \rightarrow -1^+ \\ x > -1 \quad x > -1$$

f nicht stetig in x= -1, da rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert verschieden



GRUNDAUFGABE 27

Stetige Fortsetzung von Funktionen

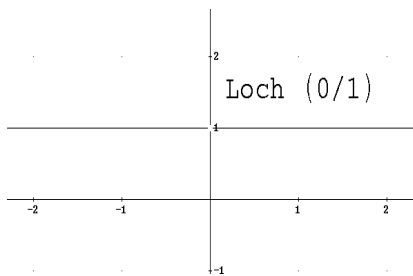
Beispiel:

$$f(x) = \frac{x}{x} \quad \text{ID}_{\max} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

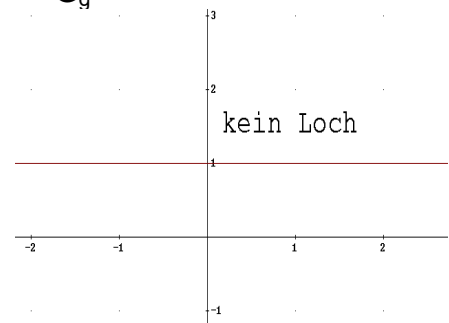
Außer für $x=0$ kann man den Funktionsterm kürzen: $f(x) = \frac{x}{x} = 1$
 $x \neq 0$

D.h. außer für $x=0$ sieht der Graph aus wie der Graph von $y=1$.
 Dort ist f nicht definiert. \Rightarrow der Graph hat ein Loch

G_f



G_g



Wir definieren: für $x=0$ sei $f(x)=1$,
 Dann haben wir eine neue Funktion g :

$$g(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) \text{ wenn } x \neq 0 \\ 1 \text{ wenn } x = 0 \end{array} \right\} = 1$$

Der Definitionsbereich von f wurde erweitert:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $D_g = \mathbb{R} \Rightarrow g$ heißt stetige Fortsetzung von f .

GRUNDAUFGABE 28

Wie man Funktionen mit Betrag ableitet

Beispiel:

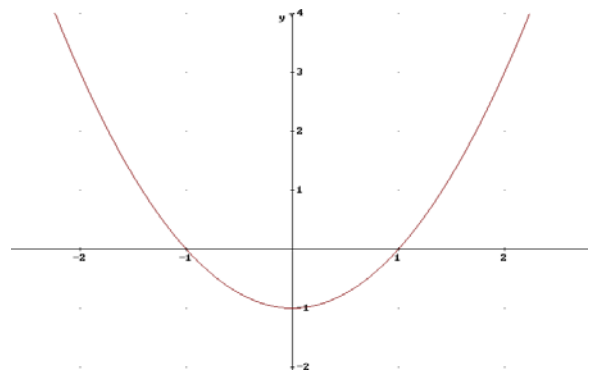
$$f(x) = |x^2 - 1|$$

Es gibt keine Ableitungsregel für Beträge
 \Rightarrow wir schreiben f abschnittsweise auf:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{wenn } x^2 - 1 \geq 0 \\ -(x^2 - 1) & \text{wenn } x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

(siehe auch Grundaufgabe 8)

Skizze statt Nebenrechnung:
 Wann ist $x^2 - 1 \geq 0$?
 wir sehen: $x \leq -1$ oder $x \geq 1$

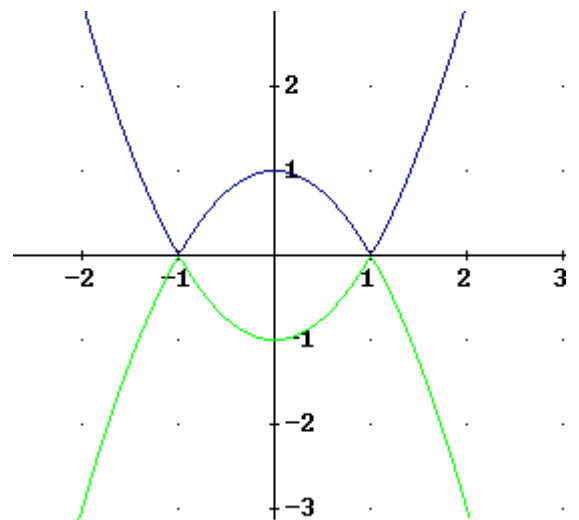


Vereinfachung der Schreibweise:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{wenn } x \leq -1 & \text{hier „}\leq\text{“} \\ -x^2 + 1 & \text{wenn } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{wenn } x > 1 \end{cases}$$

Es sieht so aus, als hätte der Graph bei $x = 1$ und $x = -1$ Knicke, d.h. f ist dort nicht differenzierbar.

Man kann f zunächst nur abschnittsweise, ableiten, aber nicht an den Übergangsstellen:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 ; x \leq -1 & \text{hier „}\leq\text{“} \\ -x^2 + 1 ; -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 ; x > 1 \end{cases}$$

An den Übergangsstellen muss die Differenzierbarkeit extra untersucht werden: siehe Grundaufgabe 29.

GRUNDAUFGABE 29

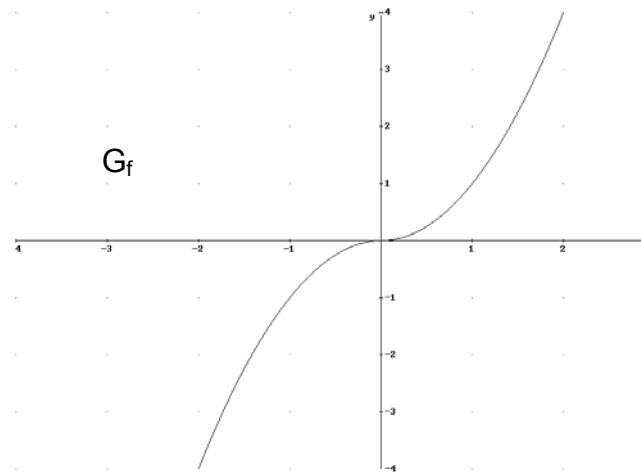
Wie man abschnittsweise definierte Funktionen ableitet

Beispiel: $f(x) = x \cdot |x|$

Man kann Beträge nicht ableiten \Rightarrow wir schreiben f abschnittsweise auf

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \geq 0 \\ -x^2; & x < 0 \end{cases} \quad \text{„}\geq\text{“}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x; & x > 0 \\ -2x; & x < 0 \end{cases} \quad \text{„}\geq\text{“}$$



An der Übergangsstelle $x=0$ untersuchen wir, ob die Ableitung existiert:

- I. rechtsseitiger Grenzwert von f' = linksseitiger Grenzwert von f' ??
 II. f stetig ?

zu I.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x) = -2 \cdot 0 = 0$$

\Rightarrow Grenzwerte gleich

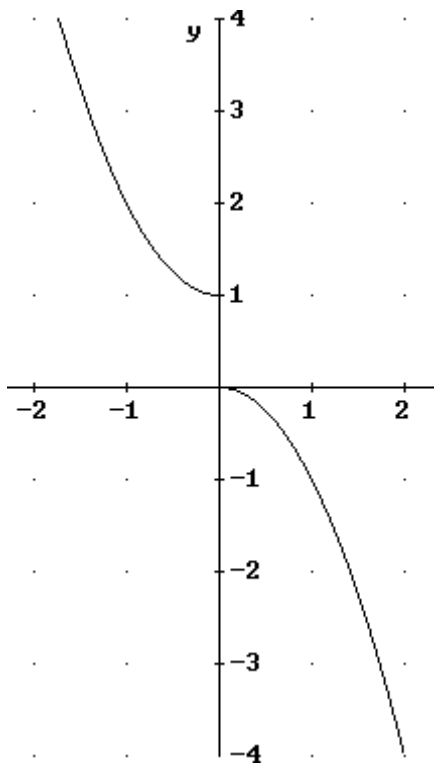
zu II. (vgl. Grundaufgabe 26)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) = 0^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = -0^2 = 0$$

\Rightarrow Grenzwerte gleich $\Rightarrow f$ auch stetig \Rightarrow
 f differenzierbar in $x=0 \Rightarrow$
 f überall differenzierbar

Warum ist dieser II Schritt notwendig?



Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ; \text{wenn } x < 0 \\ -x^2 & ; \text{wenn } x \geq 0 \end{cases}$$

Dieser Graph hat bei $x=0$ einen Sprung, ist also nicht stetig.

Rechnerischer Nachweis der Unstetigkeit:

linksseitiger Grenzwert :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1) = 1$$

rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0 !$$

$\Rightarrow f$ ist also nicht stetig in $x=0$

vgl. Grundaufgabe 26.

Wir führen Schritt I. durch:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x > 0 \\ -2x & ; x < 0 \end{cases}$$

rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 2 \cdot 0 = 0$

linksseitiger Grenzwert: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-2x) = -2 \cdot 0 = 0$

Wenn man also die Stetigkeit nicht extra untersucht, hält man aufgrund von Schritt I f fälschlicherweise für differenzierbar und dadurch für stetig in $x=0$.

GRUNDAUFGABE 30**Grenzwertbestimmung nach L'Hospital**Aufgabenstellung:

Man soll den Grenzwert an den Rändern des Definitionsbereiches bestimmen. Hierzu ist egal, ob die Ränder im Unendlichen liegen ($x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$) oder ob es sich um eine Definitionslücke im Endlichen handelt ($x \rightarrow$ irgendeine Zahl).

Voraussetzungen:

Die Funktion muss ein Bruch sein, oder man muss sie durch algebraische Umformung als Bruch schreiben können.

Zähler und Nenner gehen beide nach unendlich oder beide nach Null.

Durchführung:

Dann leitet man Zähler und Nenner getrennt ab (KEINE Quotientenregel); der Grenzwert hat sich dadurch in seinem Wert nicht verändert, ist aber in der Regel leichter bestimmbar. Notfalls muss man L'Hospital ein zweites Mal anwenden

Beispiel 1

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{1} = 1$$

↓
0

Anmerkung: Man muss hierbei nachweisen, dass man L'Hospital auch anwenden darf; dass es ein Bruch ist, sieht man; dass Z und N gegen Null gehen, muss man hinschreiben.

Anmerkung 2: Wenn man diesen Grenzwert einmal inhaltlich betrachtet, dann handelt es sich um eine rationale Funktion, wo wir bei der Nullstelle $x=1$ des Nenners ja eine Unendlichkeitsstelle (Pol) erwarten würden, so dass der Graph sich an eine senkrechte Asymptote anschmiegt. Da $x=1$ aber auch eine Nullstelle des Zählers ist, hat der Graph bei $x=1$ ein Loch $L(1/1)$ – dass die y -Koordinate von $L y=1$ ist, liegt daran, dass wir den Grenzwert mit 1 berechnet haben. (Es wäre also eine stetige Fortsetzung von f möglich).

Anmerkung 3: Man kann diesen Grenzwert natürlich auch anders berechnen, indem man den Zähler faktorisiert:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \neq 1} \frac{x}{1} = 1$$

Beispiel 2.

$$\begin{array}{c} \infty \\ \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x - 1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{1} = \infty \\ \downarrow \\ \infty \end{array}$$

Auch diesen Grenzwert hätten wir durch Ausklammern der höchsten Potenz von x , also x^2 in Z und N und anschließendes Kürzen errechnen können,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty$$

weil im letzten Schritt die drei kleinen Brüche alle gegen Null gehen.

Beispiel 3:

$$\begin{array}{c} 2 \\ \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{x + 1} \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

Hier haben wir versucht, das Verhalten in der Nähe der Nennernullstelle zu bestimmen. L'H. lässt sich hier aber nicht anwenden, weil der Zähler nicht gegen Null geht. Zum Glück wissen wir ja, dass es sich hier um eine Unendlichkeitsstelle einfacher Ordnung handelt, so dass auf der einen Seite der senkrechten Asymptote die Funktionen gegen ∞ geht, auf der anderen Seite gegen $-\infty$.

Bisher gab es auch noch andere Methoden, um die gesuchten Grenzwerte herauszubringen. Häufig führt an L'Hospital aber (fast) nichts vorbei:

Beispiel 4:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

Wichtig wird die Grenzwertbestimmung mit L'Hospital vor allem bei e- und ln-Funktionen (12. Jahrgangsstufe):

Beispiel 5

$$\begin{array}{c} \infty \\ \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \infty \\ \downarrow \\ \infty \end{array}$$

Es folgen 2 Beispiele, bei denen die Funktion zunächst nicht als Bruch vorliegt, sondern man Grenzwerte vor sich hat der Form ∞^0 , $0 \cdot \infty$ oder ähnliches:

Beispiel 6

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} -\infty & 0 & -\infty \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0 \end{array} & \text{Hier ist es nicht möglich, } -\infty \cdot 0 = 0 \\ & \text{zu rechnen, da } \infty \text{ keine Zahl ist!!!} \\ \downarrow & \\ -\infty & \end{array}$$

Man hätte natürlich auch den Faktor „x“ in den Zähler stopfen können:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc} -\infty & 0 \\ \uparrow & \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \\ \downarrow \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = \dots \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \\ \stackrel{L'H}{=} & & \end{array}$$

Die Voraussetzungen für L'Hospital sind zwar gegeben, aber es führt nicht zum Ziel, denn die Potenzen im N werden nur immer größer, und der Grenzwert komplizierter, statt einfacher.

Beispiel 7

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \infty & 0 & \infty \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0 \end{array} & \text{Hier muss man L'H.} \\ & \text{zweimal anwenden, da} \\ & \text{nach dem ersten Mal der} \\ & \text{Grenzwert immer noch } \infty / \infty \text{ heißt.} \\ \downarrow & \downarrow \\ \infty & \infty \end{array}$$